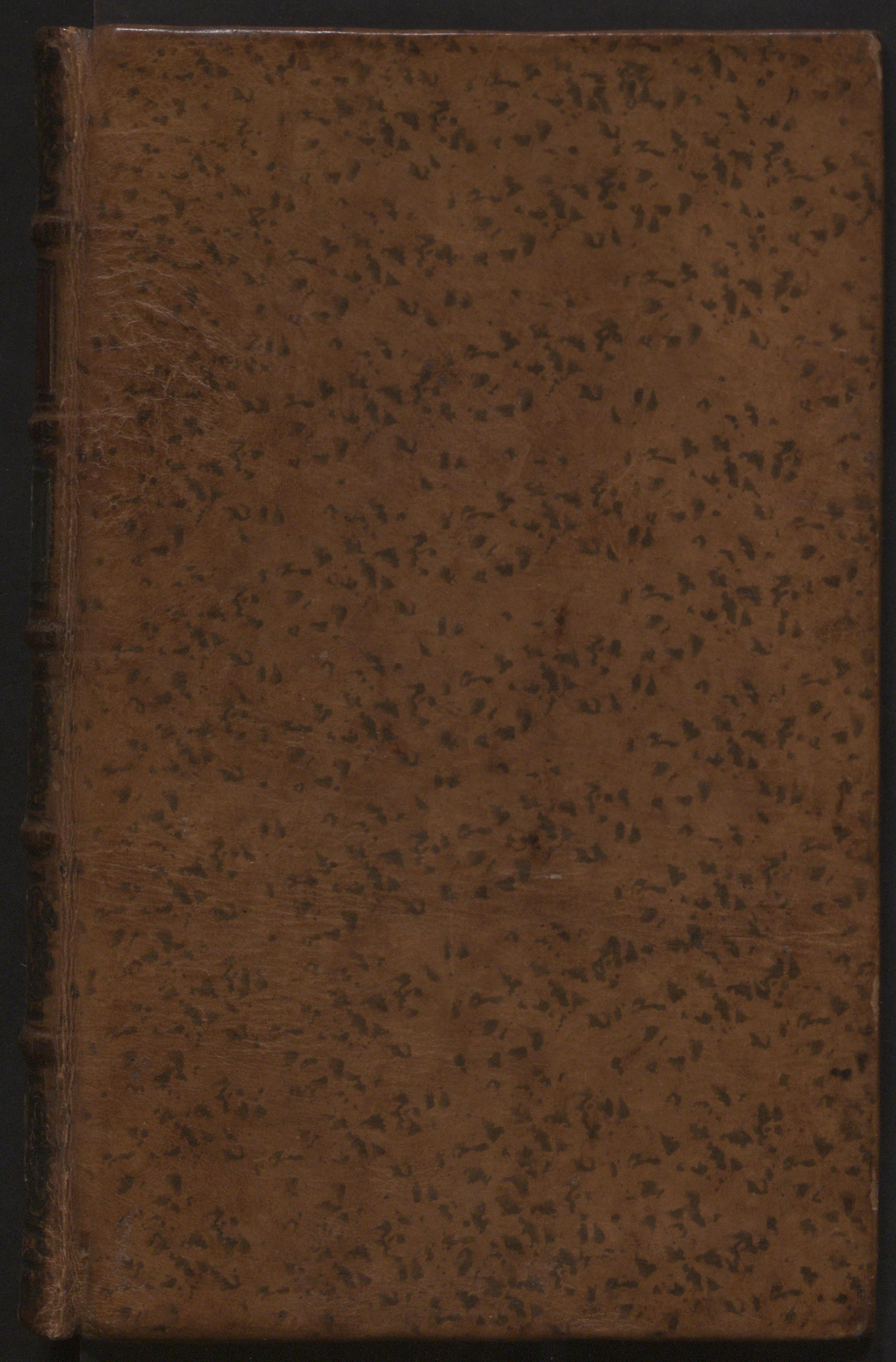
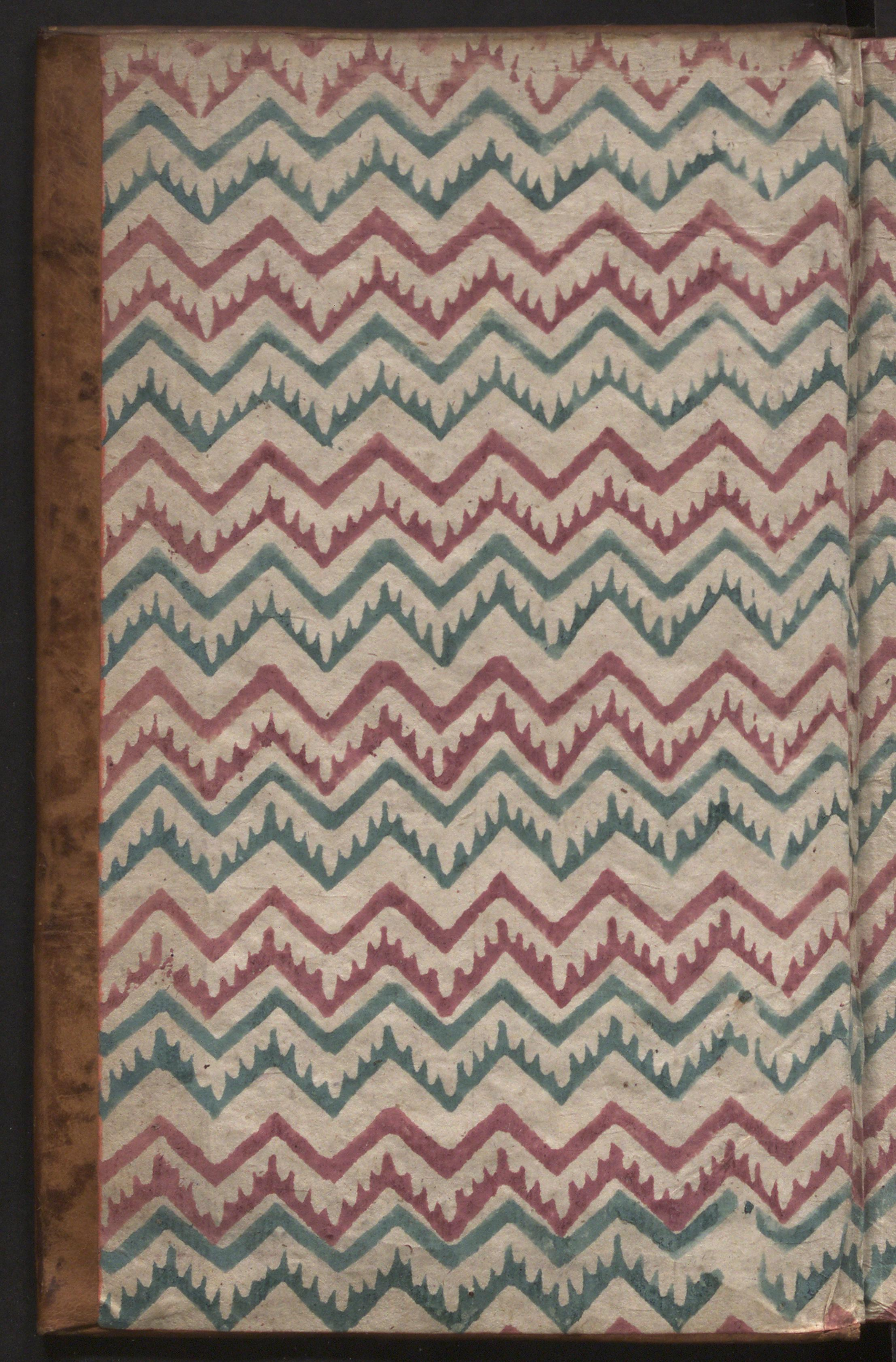
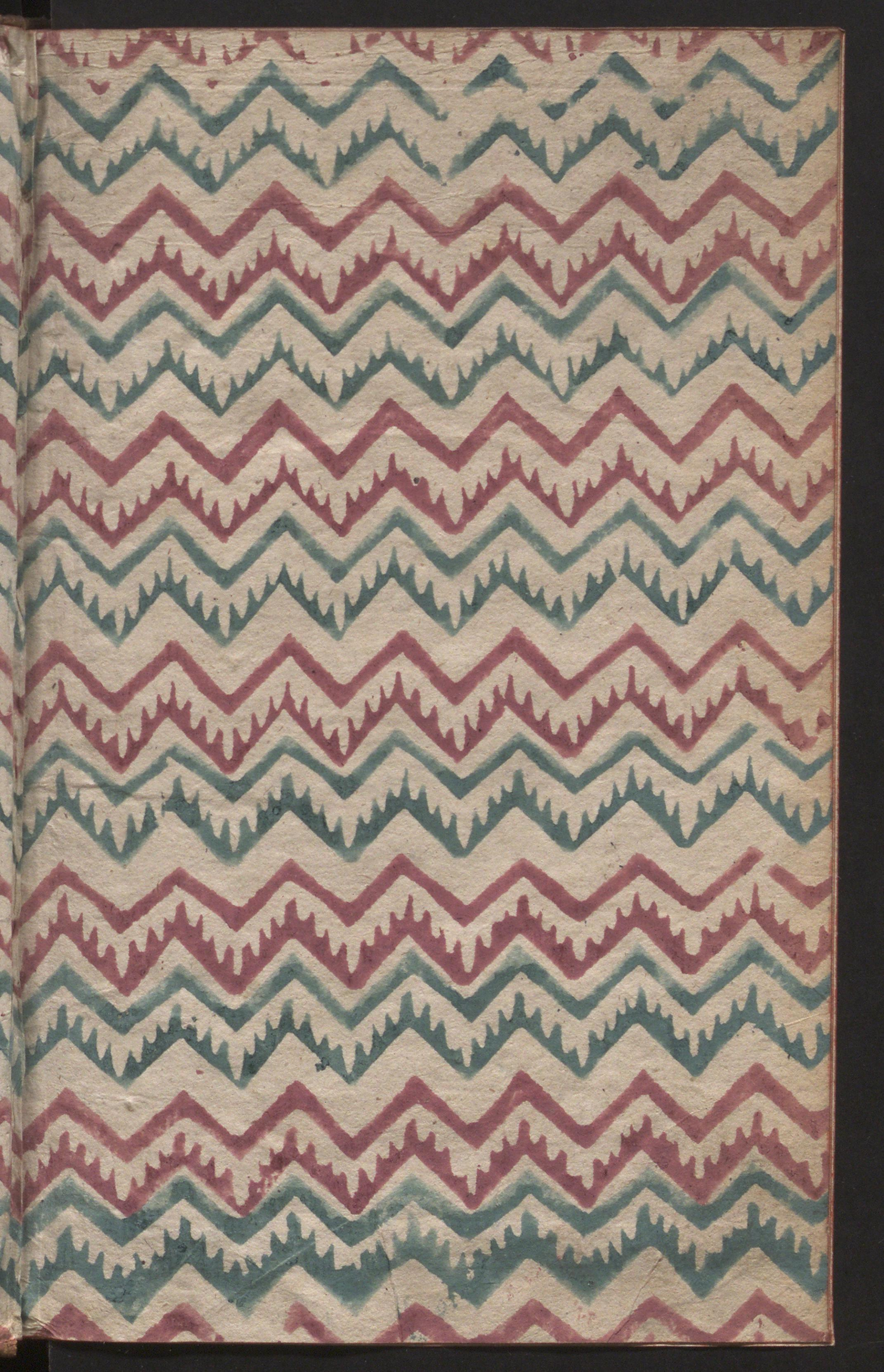






КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ
ТОМЪ IV.
АЛГЕБРА.

ТЕОРЕТИЧЕСКАГО
И
ПРАКТИЧЕСКАГО
КУРСА
ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ
ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ,

содержащая въ себѣ полную и сокращенную Алгебру съ вышними степеньми, и съ присовокупленіемъ разныхъ Геометрическихъ задачь

въ пользу и употребленіе

ЮНОШЕСТВА

и упражняющихся въ Математикѣ,

СОЧИНЕННАЯ

Артиллеріи Штыкъ-Юнкеромъ и партикулярнымъ въ Москвѣ благороднаго юношества Учителемъ Математики

Ефимомъ Войтяховскимъ.

Съ 5 ю чертежами.

Съ Указнаго Дозволенія.

ВЪ МОСКВѢ,

Печатана иждивеніемъ сочинителя въ вольной типографіи Хр. Клаудія

1790 года.

Гр. Алекс. Фр. Селин[illegible]



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Благосклонный Читатель! кажется, нѣтъ средства вымыслить предлагаемой здѣсь наукѣ другаго уподобленія, какое ей приписалъ Г. *Профессоръ Румовскій* говоря: „ произхожденіе Ал„ гебры не можно лучше представить, какъ „ ежели Ариѳметику и Геометрію сравнить съ „ двумя рѣками, изъ коихъ каждая, сначала „ имѣя особенное теченіе, напослѣдокъ соеди„ нившись составили одну, пространствомъ, „ стремленіемъ и глубиною несравнено прежнихъ „ превосходящую. Никакая изъ Математическихъ наукъ не приноситъ столько чести разуму человѣческому, какъ Алгебра; поелику мы ясно видимъ, что Механика, Астрономія и всѣ части смѣшанной Математики совершенствомъ обязаны сей наукѣ. Не утѣшаетъ ли насъ то, когда Звѣздочетъ посредствомъ Алгебры изчисляетъ и опредѣляетъ намъ точное время движенія, путь, скорость, противостояніе и обращеніе около своихъ средоточій тѣлъ небесныхъ? и не предполагаетъ ли намъ тѣхъ самыхъ минутъ время, въ которое имѣетъ быть Солнечное или Лунное затмѣніе? Мы чрезъ правила сей науки изслѣдываемъ многія важныя Математическія истинны, и открываемъ новыя изъ нихъ заключенія, безъ которой бы трудъ нашъ оставался тщетнымъ.

Алгебра не столь многотрудная наука, какъ то нѣкоторые заключаютъ, естьли только правила оной учащемуся ясно изтолкованы будутъ.

 Раз-

Разсматривая понятія и стремленія учащихся, удобно можно оную преподавать по окончаніи четырехъ Ариѳметическихъ правилъ десятичныхъ дробей, не входя въ правила степеней и извлеченія корней, что безъ сомнѣнія послужитъ имъ легчайшимъ руководствомъ въ изслѣдываніи истиннъ Геометрическихъ и прочихъ частей Математики предложеній; по сей-то причинѣ старался я оную разположить такъ, дабы учащіеся удобно могли почти въ самыхъ еще началахъ оной разрѣшать любопытства достойные вопросы самыми простыми и удобопонятнѣйшими правилами, не подвергаясь многотруднымъ Ариѳметическимъ размышленіямъ, и тѣмъ самимъ пріохотить ихъ къ сей важной части Математики.

Ежели я ошибаюсь въ моихъ мнѣніяхъ, то вы, благосклонный читатель, можете вести учащихся правиламъ сей науки по собственному вашему благоразумію; и для того я ища вашего ко мнѣ снизхожденія, покорнѣйше прошу недостатки оной, равно и находящіяся въ ней мои и типографическія погрѣшности, коихъ мнѣ время, отвлекающее повсядневно къ должности преподаванія Юношеству слабыхъ моихъ знаній, не дозволило основательнѣе высмотрѣть, вашимъ изобильнымъ знаніемъ исправить, чѣмъ вы чувствительно одолжите пребывающаго вамъ съ истиннымъ почитаніемъ, съ каковымъ и есмь.

Вашъ Милостиваго Государя

нижайшій слуга *Ефимъ Войтяховской.*



ОГЛАВЛЕНІЕ АЛГЕБРЫ.

Страницы.

О Двухъ



О
Алгебрѣ вообще и о разныхъ родахъ исчисленія простыхъ и сложныхъ количествъ.

§ 1. *Опредѣленіе.* *Алгебра* или *общая Ариѳметика* есть наука, по извѣстнымъ величинамъ, изображая ихъ азбучными буквами, сыскивать неизвѣстныя количества.

§ 2. *Положеніе.* Всякая буква означать можетъ всѣ возможныя числа, *на примѣръ*: буква d можетъ значить 5, 12, 174 и прочая; также принимается и вмѣсто $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$ и проч.

§ 3. *Примѣчаніе.* Въ Алгебрѣ знаки правилъ употребляются такіежъ, какіе и въ Ариѳметикѣ, какъ-то: $+$ есть знакъ сложенія, и выговаривается *плюсъ* или *чрезъ* *съ*. Знакъ вычитанія есть $-$, и выговаривается *минусъ* или *безъ*. Знакъ умноженія есть $\times$, или точка (.). Знакъ дѣленія есть слѣдующій (:). Знакъ равенства есть $=$ и проч.

§ 4. *Опредѣлен.* Величина, имѣющая предъ собою знакъ $+$, называется *положительная* или *существующая*; а величина, предъ которою на-

ходится

ходится знакъ —, именуется *отрицательная* или *мысленная*.

Примѣчан. Отрицательная величина хотя не есть положительная, однакожъ мысленно положительною прїемлющаяся, на примѣръ: наличныя деньги, будетъ количество положительное, или существующее; а долги суть количества отрицательныя, или мнимыя. И такъ ежели положимъ, что я имѣю 1000 рублей и притомъ 300 рублей долженъ; то будетъ количество моихъ денегъ, 1000 рублей — 300 рубл. = + 700 рубл. Въ разсужденїи сего надлежитъ примѣчать, дабы не принимать отрицательнаго количества положительнымъ, то есть, долги слѣдуетъ означать чрезъ — 300, а наличныя деньги чрезъ + 300. Изъ сего видно, что отрицательное количество меньше, нежели 0 или ничего; ибо представь себѣ, что кто нибудь имѣетъ у себя 300 рубл. и такоежъ число долженъ, то количество его имѣнїя будетъ 0 или ничего, то-есть $300 - 300 = 0$; но естьли онъ, не имѣвши у себя ничего, 300 рубл. долженъ, то количество его богатства $0 - 300 = -300$ будетъ меньше нуля, или меньше, нежели ничего.

§ 5. *Положен.* Всякая величина, не имѣющая предъ собою знака +, разумѣется положительною, *на примѣръ*: $a = +a$, или $7 = +7$; отрицательнаяжъ величина должна имѣть предъ собою всегда знакъ —.

§ 6. *Положен.* Въ произведенїи нѣсколькихъ количествъ буквы пишутся нераздѣльно, на прим. $a \times b = a.b = ab$; или $a \times b \times c \times d$ пишется $abcd$. Ежели количество a умножится чрезъ a, то произведенїе пишется aa или a^2; также $a \times a \times a$ пишется aaa или a^3; а вмѣсто $a \times a \times a \times a \times a$ пишется $aaaaa$ или a^5, *на прим.* положимъ, что $a = 3$, то будетъ $aaa = a^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Число 2, 3 и 5, въ верьху буквы написанное, показываетъ сколько разъ буква a, для умноженїя поставляется, и называется *показа-*

казатель. Количество a^2, выговаривается a второй степени; a^3 зовется a третій степени, и такъ далѣе.

Примѣч. У величины, просто написанной, на прим. b, разумѣть должно показателемъ 1цу, то-есть $b = b^1$.

§ 7. *Положен.* Ежели какая нибудь буква, изображающая величину, берется нѣсколько разъ, *на примѣръ:* ежели буква b возмется 5 разъ, то число 5 пишется предъ буквою b такимъ образомъ $5b$; а когда берется 2 раза, то пишется $2b$ и проч. Число 5 также и 2 называется *предстоящимъ количества* b.

Примѣч. У величины, просто написанной, на прим. a или cd, за предстоящее мысленно пріемлется единица, какъ то $a = 1.a$, $cd = 1.cd$ и проч.

§ 8. *Опредѣл.* *Простыя величины* суть тѣ, кои не соединены съ другими количествами знакомъ $+$ или $-$, какъ на прим. a, $-bd$, $2abc^2$ и проч.

§ 9. *Опредѣлен.* *Сложныя величины* суть тѣ, кои имѣютъ нѣсколько величинъ, соединенныхъ знаками $+$ или $-$, какъ-то: $2b + ac$, $a + b - 3d$ или $ab + c^2d - 3bc$ и проч.

Прибавлен. Иногда сложныя величины раздѣляются на *двоесложныя*, *троесложныя* и проч. какъ-то: двѣ величины, соединенныя знакомъ $+$ или $-$, на прим. $a + d$, или $2a - 3ed$ именуются двоесложными. Когда три количества соединены какими нибудь знаками, на прим. $a + 2d - 3ab$; тогда оныя количества называются троесложными.

ными. *Четырех-сложными* количествами именуются тѣ величины, у коихъ четыре количества совокуплены помянутыми знаками, и вообще *многосложными* зовутся всѣ тѣ величины, у которыхъ нѣсколько количествъ соединены знаками $+$ или $-$.

§ 10. *Опредѣл.* Каждая величина изъ составляющихъ сложное количество, именуется *членомъ* или *частiю* онаго, на примѣръ: количества $a + 2d - 3ab$, величина a, $2d$ и $-3ab$ суть члены или части сложнаго количества.

§ 11. *Опредѣл.* *Подобныя* или *одинакiя* Алгебраическiя величины суть тѣ, кои означаются одинакими буквами, имѣющими равныхъ показателей, какъ-то: $3a$ и $2a$, или $5a^2$ и $2a^2$, также $3ad$ и $4ad$, суть количества подобныя; но $3a$ и $2a^2$, будутъ количества *неподобныя*, потому что $2a^2 = 2aa$ означаетъ произведенiе количества a чрезъ a, дважды взятое; а $3a$ есть количество простое a, трижды взятое.

§ 12. *Задача.* Данную сложную величину $5a^2 + 2bc - 2c^2b + b^3$ изобразить числами.

Рѣшен. Положимъ, что вмѣсто буквъ напишутся числа, на примѣръ: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, то будетъ $5a^2 = 5.3.3 = 45$, $2bc = 2.4.5 = 40$, $-2c^2b = -2.5.5.4 = -200$, $b^3 = 4.4.4 = 64$; и такъ $5a^2 + 2bc - 2c^2b + b^3 = 5.3.3 + 2.4.5 - 2.5.5.4 + 4.4.4 = 45 + 40 - 200 + 64 = -51$.

§ 13. *Задача.* Данную сложную величину, имѣющую подобныя количества, представить въ меньшемъ числѣ членовъ.

Рѣшен.

Рѣшен. I. Ежели подобныя количества будутъ имѣть одинакіе знаки, то предстоящіе сложа, сумму ихъ напиши предъ тоюже буквою; а естьли знаки оныхъ разные, то вычтя меньшее предстоящее изъ большаго, предъ остаткомъ напиши знакъ большаго количества, получишь требуемую величину въ меньшемъ числѣ членовъ, *на примѣръ*: въ сложной величинѣ $2a + d + 5a$, члены $2a$ и $5a$ суть подобные; и такъ сложа предстоящее 2 съ 5 ю, сумму ихъ 7 напиши предъ буквою a, будетъ $7a$; чрезъ что сложное количество $2a + 2d + 5a$, представится въ меньшемъ числѣ членовъ $7a + 2d$.

Также сократится и количество $a + d + 2a$: сложа предстоящія 2 съ 1 количества a, будетъ $3a + d = a + d + 2a$.

2. Ежели сложное количество будетъ $2a + d - 7a$, то вычтя предстоящее 2 изъ 7, предъ остаткомъ 5 поставь знакъ большаго количества, получишь сокращенную величину $d - 5a = 2a + d - 7a$.

3. Когда подобныя количества съ разными знаками будутъ имѣть равныхъ предстоящихъ, то такія количества уничтожаются, *на примѣръ*: $2a + d - 2a$, будетъ $= d$; также ежели будетъ нѣсколько подобныхъ количествъ положительныхъ и отрицательныхъ, то сложа предстоящія положительныхъ величинъ особливо, также и предстоящія отрицательныхъ величинъ особливо, вычти меньшее число изъ большаго, а предъ остаткомъ поставь знакъ большаго количества; будешь имѣть величину, въ меньшемъ числѣ членовъ представленную, *на примѣръ*:

 чтобъ

чтобъ сократить сложную величину $3a + d - 2a - 3d + 7a$, то изъ суммы предстоящихъ положительнаго количества a, то есть изъ 10, вычти предстоящее 2 отрицательной величины $-2a$; также и предстоящее 1 количества d, изъ предстоящаго 3 величины $-3d$, чрезъ что данное количество $3a + d - 2a - 3d + 7a$ сократится въ $8a - 2d$.

Подобнымъ образомъ сократятся и слѣдующія величины:

$10b - 3a - 8b + 4a - 2b - a = 0$

$4a^2b + 5ac - 9a^2b + 3ac - 2a^2b$ будетъ $= 8ac + 4a^2b - 11a^2b = 8ac - 7a^2b$.

О сложеніи Алгебраическихъ величинъ.

§ 14 *Задача.* Данныя Алгебраическія простыя величины сложить.

Рѣшен. I. Ежели данныя величины будутъ одинакія, и притомъ положительныя; то сложа ихъ предстоящія, напиши сумму предъ тою же буквою, получишь требуемую сумму, *на примѣръ*: сложить $5b$, b, $3b$ и $4b$. Сумма предстоящихъ будетъ $5 + 1 + 3 + 4 = 13$, которое написавши предъ буквою b, сумма будетъ $5b + b + 3b + 4b = 13b$.

2. Естьлижъ въ данномъ количествѣ одинакія величины будутъ положительныя и отрицательныя, то совокупя ихъ подлежащими знаками, сдѣлай сокращеніе (§ 13), получишь искомую сумму, *на примѣръ*: сложить $2a$, $5a$, и $-4a$, будетъ сумма ихъ $2a + 5a - 4a = 3a$. Также и

сумма

сумма величинъ c, $4c$ и $-7c$, будетъ $c + 4c - 7c = -2c$.

3. Когда разныя величины будутъ положительныя, то совокупя ихъ знакомъ $+$, будешь имѣть желанную сумму, *напримѣръ*: сложить $2a$, $3b^2$, $2bc$, $5de$, сумма будетъ $2a + 3b^2 + 2bc + 5de$. Естьлижъ разныя величины, будутъ положительныя и отрицательныя, то соедини ихъ подлежащими знаками, будешь имѣть требуемую сумму, *наприм.* $7b$ сложить съ $-3a^2$, сумма будетъ $7b - 3a^2$; также сумма количествъ $3b$, $-2bc$, $3a$ и $-4ad^2$ будетъ $= 3b - 2bc + 3a - 4ad^2$.

§ 15. *Задача.* Найти сумму сложныхъ количествъ.

Рѣшен. Ежели въ данныхъ величинахъ будутъ одинакія количества; то написавши ихъ одну подъ другую, сдѣлай сложеніе, какъ въ предъидущей задачѣ показано; а прочія, не имѣющія подобныхъ себѣ величинъ, соедини съ данными величинами подлежащими ихъ знаками, получишь требуемую сумму, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.	*Примѣръ II.*
$4a^2 + 2b$	$5ab + 2ac - 3a^2 - n$
$-3a^2 - 5b$	$4ab - 5ac + 4a^2 - 1$
$2a^2 - 3b$	$-2ab + ac - 5a^2 + 2n$
$3a^2 - 6b =$ сум.	$7ab - 2ac - 4a^2 + n - 1 =$ сум.

Примѣръ III.

$$4a^2bc + 5abc - 7b^2 + 3d^2$$
$$3a^2bc - 3\ bc + 3b^2 + 1 - n$$
$$-2a^2bc - abc + b^2 + d^2$$
$$3a^2bc - 7abc + 5b^2 - 4d^2 + m^2$$
$$8a^2bc - 6abc + 2b^2 + 1 - n + m^2 = \text{сум. кол.}$$

О вычитаніи Алгебраическихъ величинъ.

§ 16. *Задача.* Данную простую величину, вычесть изъ другой.

Рѣшен. I. Ежели положительныя величины будутъ не одинакія, то слѣдуетъ только вычитаемое количество приписать къ другому данному съ знакомъ —, *на примѣр.*: изъ $3d$ вычесть $2a$, разность будетъ $3d - 2a$. Также когда изъ $5a^2$ вычесть должно $4a$, то разность будетъ $5a^2 - 4a$.

2. Естьли данныя величины будутъ одинакія, то соединя вычитаемое количество съ тѣмъ, изъ котораго вычесть должно, знакомъ —, сдѣлай сокращеніе, будетъ требуемая разность, *на прим.* изъ $5b$ вычесть $3b$, разность будетъ $5b - 3b = 2b$. Естьлижъ изъ $+ 3a$ вычтется $+ 7a$, то разность будетъ $3a - 7a = - 4a$.

Примѣч. Изъ сего видно, что разность Алгебраическихъ величинъ пишется также, какъ и разность чиселъ, наприм. изъ 12 вычесть 5, разность будетъ 12 — 5 = 7; также и 3 — 7 = — 4 (Том. I. § 47.).

§ 17. *Задача.* Сложную величину съ разными знаками вычесть изъ данной.

Рѣше-

Рѣшен. Перемѣня въ вычитаемомъ количествѣ всѣ знаки въ противные, то есть $+$ въ $-$, а $-$ въ $+$, соедини ихъ съ данною величиною; потомъ, ежели можно, сдѣлай сокращеніе, будешь имѣть искомую разность, *на прим.* изъ величины c вычесть количество $a-b$, искомая разность будетъ $= c-a+b$.

Доказател. Ибо вычтя изъ количества c сперва одно количество a, разность будетъ $c-a$; но какъ слѣдовало вычесть изъ онаго не цѣлое количество a, но a безъ b: посему изъ величины c вычтено больше должнаго количествомъ b; по сей причинѣ къ остатку $c-a$ надлежало придать количество b; слѣдовательно искомая разность $= c-a+b$.

Прибавлен. Дабы показанное вычитаніе удобнѣе разумѣть можно было, то представь себѣ, что изъ 12 вычесть должно $7-2$, то-есть 5, разность будетъ $12-7+2=7$; ибо ежели написать $12-7$, то сіе будетъ значить, что изъ 12 вычтено 2мя больше должнаго; поелику слѣдовало вычесть не цѣлое 7, но $7-2$, то-есть 5; по сей причинѣ къ числу $12-7$, надлежитъ придать 2, будетъ требуемая разность $= 12-7+2=7$.

Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, ежели должно будетъ изъ положительной величины вычесть отрицательную; то перемѣня въ вычитаемомъ количествѣ знакъ $-$ въ $+$, припиши оную съ симъ знакомъ къ тому количеству, изъ котораго вычитать должно было, получишь иско-

мую разность, *на примѣръ*: изъ $+ 5b$ вычесть $- 3b$, разность будетъ $5b + 3b = 8b$.

Примѣч. Изъ двухъ предъидущихъ задачь и слѣдствiя удобно можно видѣть, что при вычитанiи подобныхъ положительныхъ или отрицательныхъ величинъ, то есть съ одинакими знаками, предстоящее одно изъ другаго вычитается и предъ остаткомъ ставится знакъ большаго количества (представя себѣ знакъ вычитаемаго количества противнымъ); а предстоящiя одинакихъ величинъ съ разными знаками, одно съ другимъ складывается, и предъ суммою ихъ пишется знакъ того количества, изъ котораго должно было сдѣлать вычитанiе, *на примѣръ*: изъ $5a + 2b$, вычесть $2a - 4b$, разность по предложенной задачѣ будетъ $5a + 2b - 2a + 4b = 3a + 6b$; гдѣ изъ $+ 5a$ вычтено $+ 2a$, осталось $+ 3a$; но $+ 2b$ и $- 4b$ по перемѣнѣ знака сложены, коихъ сумма $= 6b$; что и числами повѣрить можно, на примѣр. пусть $a = 20$, $b = 3$, то будетъ $5a + 2b = 5.20 + 2.3 = 100 + 6 = 106$, также и $2a - 4b = 2.20 - 4.3 = 40 - 12 = 28$, которое вычтя изъ 106, разность будетъ $106 - 28 = 78$; тожъ самое число содержитъ въ себѣ и разность $3a + 6b$; ибо $3a + 6b = 3.20 + 6.3 = 60 + 18 = 78$.

§ 18. *Задача.* Изъ сложной величины вычесть другую сложную.

Рѣшен. Подписавши вычитаемое количество подъ другое данное, представь себѣ мысленно, что знаки вычитаемаго количества перемѣнены въ противные; потомъ сдѣлай вычитанiе, какъ въ

предъ-

предъидущихъ задачахъ и примѣчаніи показано, *на примѣръ*:

изъ $2ab + 3d - 2n$
вычесть $ab + 5d + 3n$
разность будетъ $= ab - 2d - 5n$

Примѣръ II.

изъ $5ab + 4cd - a^2 + 2ed$
вычесть $- 7ab + 3cd - 3a^2 + 2ed$
разность $= 12ab + cd + 2a^2$

Примѣръ III.

Изъ $8a^2 - 9ab + 2ab^2 - 9b^3 - c^3 + a - p$
вычесть $6a^2 - 3ab - 2ab^2 - 3b^3 - c^3 - n - 1 + m$
разность $= 2a^2 - 6ab + 4ab^2 - 6b^3 + a - p + n + 1 - m$.

О умноженіи Алгебраическихъ величинъ.

§ 19. *Задача.* Умножить данную Алгебраическую величину чрезъ другую.

Рѣшен. 1. Ежели какое нибудь количество, буквою изображенное, должно будетъ увеличить въ нѣсколько разъ; то слѣдуетъ только предстоящее множимаго количества умножить данным числомъ, и произведеніе ихъ написать предъ множимою буквою, *на примѣръ*: $b \times 3 = 3 \cdot 1 . b = 3b$. Также и $2ad \times 4 = 4 . 2ad = 8ad$.

2. Отъ умноженія количества a чрезъ b произведеніе будетъ (какъ о семъ уже прежде говорено) $a \times b = ab$.

3. Ежели должно будетъ $2a$ умножить чрезъ d, то произведеніе пишется $2ad$; ибо произведеніе a чрезъ d будетъ $= ad$; но какъ множимое

мо количество a, есть дважды взятое, то и произведеніе ad должно быть дважды взятое, то-есть $2a \times d = 2ad$; но ежели множитель d будетъ втрое больше, то и произведеніе будетъ втрое больше $2ad$, то есть $2a \times 3d = 6ad$. Изъ сего видно, что въ умноженіи Алгебраическихъ величинъ предстоящія одно другимъ умножается, по правилу умноженія простыхъ чиселъ.

4. Ежели умножится a чрезъ a^2, то произведеніе будетъ a^3; ибо $a = a^1$ (§ 6 примѣч.), $a^2 = aa$; по сему $a^1 \times a^2 = a \times aa = aaa = a^3$ (§ 6), гдѣ показатель 3 равенъ суммѣ показателей множимаго 1 и множителя 2. Также $b^2 \times b^3 = b^5$; ибо $b^2 = bb$, $b^3 = bbb$, по сему $b^2 \times b^3 = bb \times bbb = bbbbb = b^5$ (§ 6). Изъ сего явствуетъ, что при умноженіи одинакихъ буквъ, показатели множимыхъ количествъ складываются, коихъ сумма, написанная надъ тою же буквою, означаетъ требуемое произведеніе, какъ-то: $a^7 \times a^5 = a^{7+5} = a^{12}$. Также $2d^3 \times 5d^5 = 10d^{3+5} = 10d^8$.

§ 20. *Теорема.* Въ произведеніи двухъ какихъ нибудь величинъ съ одинакими знаками будетъ знакъ $+$; а при умноженіи величинъ съ разными знаками въ произведеніи будетъ $-$: то-есть $+ \times +$ или $- \times - = +$, а $+ \times -$ или $- \times + = -$.

Доказат. Положимъ, что должно умножить количество $a - b$, чрезъ $c - d$. Умножь сперва количество a чрезъ c (ибо умноженіе Алгебраическихъ

ческихъ величинъ начинается съ лѣвой руки на право) произведенiе будетъ ac; но какъ должно умножить чрезъ c, не цѣлое количество a, но a безъ b; по сей причинѣ произведенiе ac будетъ больше подлиннаго отрицательнымъ количествомъ b, столько разъ взятымъ, сколько величина c въ себѣ единицъ имѣетъ; того ради умножа количество b чрезъ c, припиши произведенiе bc къ первому произведенiю ac съ знакомъ —, будетъ подлинное произведенiе количества $a-b$, только чрезъ одно c, $= ac - bc$, которое будетъ больше требуемаго величиною $a-b$, столько разъ взятою, сколько количество d въ себѣ единицъ имѣетъ; поелику должно было умножить количество $a-b$ не на цѣлое количество c, но на $c-d$; по сей причинѣ произведенiе $(a-b).d = ad - bd$, слѣдуетъ вычесть изъ перваго произведенiя $ac - bc$, остатокъ будетъ $ac - bc - ad + bd$ подлинное произведенiе (ибо въ вычитанiи, знаки перемѣняются въ противныя § 17.); слѣдовательно $+ \times +$ или $- \times - = +$, а $+ \times -$ или $- \times + = -$. ч. д. н.

$$\begin{array}{l} a-b \\ c-d \\ \hline ac-bc-ad+bd \end{array}$$

Тожъ самое можно доказать и числами, *на примѣръ*: положимъ множимое $7-3$, а множитель $5-2$. И такъ умножь сперва 7 чрезъ 5 произведенiе будетъ 35, но какъ слѣдовало умножить не цѣлое 7 чрезъ 5, но 7 безъ 3, то есть 4; того ради умножа 3 чрезъ 5,

$$\begin{array}{l} 7-3 \\ 5-2 \\ \hline 35-15=20 \\ \quad -14+6=-8 \\ \hline 35-29+6=20-8=12 \end{array}$$

про-

произведеніе 15 припиши къ числу 35 съ знакомъ —, будетъ подлинное произведеніе $35 - 15 = 20$, которое больше требуемаго произведенія величиною $7 - 3 = 4$, дважды взятою; поелику должно было умножить количество $7 - 3$ не на цѣлое число 5, но на 5 безъ 2хъ, то есть чрезъ 3; по сей причинѣ, умножа количество $7 - 3 = 4$ чрезъ 2, произведеніе $14 - 6 = 8$ вычти изъ произведенія $35 - 15 = 20$, разность будетъ $35 - 15 - 14 + 6 = 20 - 8 = 12 = 4 \times 3$ подлинное произведеніе.

Слѣдствіе. Изъ сего удобно можно видѣть, что отъ умноженія величинъ съ одинакими знаками произведеніе будетъ положительное; а отъ умноженія величинъ съ разными знаками произведеніе будетъ отрицательное, *на примѣръ*:

$+ 3a^2 \times + 2a^2 = + 6a^4$.
также $- 7ab^3 \times - 3a^2 b = + 21a^3 b^4$;
но $+ ab \times - ac = - a^2bc$;
также $- 2ad \times + d = - 2ad^2$.

§ 21. *Задача.* Умножить количество $3a^2x + 2p$ чрезъ $a - 2x$.

Рѣшен. Написавши множителя подъ множимое количество, умножъ первой членъ $3a^2x$ множимаго, первымъ членомъ a множителя, произведеніе $3a^3x$ напиши подъ чертою;

$$\begin{array}{l} 3a^2x + 2p \\ a - 2x \\ \hline 3a^3x + 2ap - 6a^2x^2 - 4px. \end{array}$$

потомъ умножъ второй членъ $2p$ множимаго, тѣмъ же количествомъ множителя, произведеніе $+ 2ap$ припиши къ первому; напослѣдокъ умножъ

такимъ

такимъ же образомъ первой и вторый членъ множимаго, вторымъ членомъ $-2x$ множителя, произведеніе $-6a^2x^2 - 4px$ припиши къ первому произведенію подъ чертою, получить требуемое произведеніе.

Примѣч. 1. Въ умноженіи Алгебраическихъ сложныхъ количествъ одного другимъ, надлежитъ всѣ части множимаго количества умножать каждымъ членомъ множителя, а потомъ всѣ произведенія сложить, коихъ сумма будетъ требуемое произведеніе.

Примѣч. 2. Въ умноженіи количествъ нѣтъ нужды наблюдать, какое бы изъ множимыхъ количествъ ни написано было прежде, *на примѣръ*: количество ли a умножится чрезъ p или p чрезъ a; ибо будетъ произведеніе $ap = pa$, какъ на пр. $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$. Также $apd = pad$; ибо $ap = pd$, посему $apd = pad$ (Томъ I § 35). Положимъ, что $a = 2$, $p = 3$, $d = 4$, то будетъ $apd = 2.3.4 = 3.2.4 = 4.2.3 = 4.3.2 = 2.4.3 = 3.4.2 = 24$; также и $apd = pad = dap = dpa = adp = pda$, то-есть, какая бы буква ни занимала первое мѣсто, произведеніе будетъ всегда одинако.

Такимъ же образомъ, какъ въ предъидущей задачѣ показано, умножаются всѣ сложныя количества, какъ-то изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

Умножить величину $a + b$ чрезъ $a - b$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 = \text{произв.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{l} 2a^2 - 2ab + 3c^2 \\ \quad\ 6ab - 2c^2 \\ \hline 12a^3b - 12a^2b^2 + 18abc^2 \\ - 4a^2c^2 \;\ldots\; + 4abc^2 - 6c^4 \\ \hline 12a^3b - 12a^2b^2 - 4a^2c^2 + 22abc^2 - 6c^4. \end{array}$$ произв.

Примѣръ III.

$$\begin{array}{l} 2a + b - 3c \\ 4a - 5b + 2c \\ \hline 8a^2 + 4ab - 12ac \\ \quad - 10ab - 5b^2 + 15bc \\ \quad\quad + 4ac + 2bc - 6c^2 \\ \hline 8a^2 - 6ab - 8ac - 5b^2 + 17bc - 6c^2 \end{array}$$ произв.

Примѣръ IV.

$$\begin{array}{l} 4a^2 + 2ab + b^2 \\ \quad\ 2a - b \\ \hline 8a^3 + 4a^2b + 2ab^2 \\ \quad - 4a^2b - 2ab^2 - b^3 \\ \hline 8a^3 - b^3 = \end{array}$$ произв.

§ 22. *Примѣчаніе.* Иногда произведеніе двухъ или болѣе сложныхъ количествъ, для краткости означается такимъ образомъ: $(a+b) \times (a-d)$ или $(a+b)(a-d)$; при чемъ разумѣть должно, что величина $a+b$ умножается чрезъ $a-b$; но естьли напишется $a+b \times (a-d)$ или $a+b(a-d)$, то сіе значитъ, что количество a придается къ произведенію количествъ b и $a-d$.

О дѣленіи Алгебраическихъ величинъ.

§ 23. *Опредѣл. Дѣленіе Алгебраическое* естъ средство, къ двумъ даннымъ количествамъ, то

есть къ дѣлимому и дѣлителю находить третіе, которое, будучи умножено дѣлителемъ, производитъ дѣлимое. Найденное количество именуется *частнымъ*.

§ 24. *Положен.* Ежели количество ab раздѣлится на a, то частное изображается такимъ образомъ $\frac{ab}{a}$, то есть дѣлитель пишется подъ дѣлимымъ количествомъ, при чемъ частное будетъ $= b$; ибо умножа дѣлителя a чрезъ частное b, произведеніе будетъ равно дѣлимому ab.

§ 25. *Слѣдст.* Изъ сего явствуетъ, что при раздѣленіи простой величины на другую, частное число можно изображать одними только буквами дѣлителя и дѣлимаго, какъ-то $\frac{ap}{a}$, при чемъ $\frac{ap}{a} = p$; также $\frac{apd}{a} = pd$, $\frac{apd}{d} = ap$, $\frac{apd}{ad} = p$; ибо умножа дѣлителя ad частнымъ p, произведеніе apd будетъ дѣлимое.

§ 26. *Теорема.* При дѣленіи одинакихъ количествъ, показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго количества, *на примѣръ*: $\frac{a^6}{a^2}$ будетъ $= a^{6-2} = a^4$.

Доказ. Ибо умножа частное a^4 дѣлителемъ a^2, произведеніе a^6 будетъ дѣлимое.

§ 27. *Прибавл.* И такъ $\frac{a^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, $\frac{a^3}{a^2} = \frac{aaa}{aa} = a$, $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$. Также и $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$; ибо умножа дѣлителя a^5 частнымъ a^0, по правилу умноженія (§ 19), будетъ $a^5 \times a^0 = a^{5+0}$

$= a^5$,

$= a^5$, или a^5 умножа 1 ю, произведеніе $a^5 \times 1 = a^5$ будетъ тожъ самое дѣлимое; по сей причинѣ всякое количество, имѣющее показателя нуль, будетъ $= 1$.

Примѣч. Ежели данныя количества будутъ имѣть предстоящихъ, то предстоящее дѣлимаго дѣлится, по правилу Ариѳметическому, на предстоящее дѣлителя, и частное ихъ приписывается къ буквѣ частнаго количества, *на прим.* $\frac{6ap}{2a} = 3p$, также $8ab$ раздѣля на $2a$, частное будетъ $\frac{8ab}{2a} = 4b$ и $\frac{15a^4}{3a} = 5a^{4-1} = 5a^3$; равнымъ образомъ $\frac{8a^4b^2}{2a} = 4a^3b^2$; ибо $4a^3b^2 \times 2a = 8a^4b^2 =$ дѣлимому.

§ 28. *Теорема.* При дѣленіи величинъ съ одинакими знаками въ частномъ будетъ знакъ $+$, а при дѣленіи количествъ съ разными знаками въ частномъ будетъ $-$, то есть $+:+$ или $-:- = +$; но $+:-$ или $-:+ = -$.

Доказат. Положимъ, что количество $+6a^4b$ должно раздѣлить на $+2a^2$, то частное будетъ $\frac{6a^4b}{2a^2} = 3a^2b$; ибо $+3a^2b \times +2a^2 = +6a^4b$; также и $\frac{-4a^2b}{-2a^2} = +2b$; ибо $+2b \times -2a^2 = -4a^2b$, равно дѣлимому. Равнымъ образомъ $\frac{+21a^3b^4}{-3a^2b} = -7ab^3$; ибо $-7ab^3 \times -3a^2b = +21a^3b^4$; также и $\frac{-2ad^3}{+2ad} = -d^2$; ибо $+2ad \times -d^2 = -2ad^3$ равно дѣлимому. ч. д. н.

§ 29. *Задача.* Сложное количество раздѣлить на простое.

Рѣшен. Раздѣли каждой членъ дѣлимаго количества на даннаго дѣлителя, частное число съ подлежащими знаками напиши за чертою по правую сторону дѣлимаго; получишь требуемое частное, *на примѣръ*: чтобы раздѣлить количество $5a^2 - 10ad$ на $5a$, то раздѣля крайнее $5a^2$ чрезъ $5a$, частное a напиши за чертою, потомъ раздѣли $-10ad$ чрезъ $5a$, частное $-2d$ (§ 28.) напиши подлѣ перваго количества a; и такъ частное $a - 2d$ будетъ цѣлое, которое ежели умножится дѣлителемъ $5a$, то произведеніе будетъ дѣлимое $5a^2 - 10ad$.

$$5a)\ 5a^2 - 10ad\ (a - 2d \text{ частн.}$$
$$5a^2$$
$$\overline{-10ad}$$
$$-10ad$$

§ 30. *Задача.* Сложное количество раздѣлить на другое сложноежъ.

Рѣшен. Дѣленіе Алгебраическихъ величинъ производится почти также, какъ и дѣленіе чиселъ, *на примѣръ*: ежели должно будетъ раздѣлить количество $a^2 - 2ab + b^2$ на $a - b$, то поставя дѣлителя съ лѣвой стороны дѣлимаго, раздѣли первой членъ a^2 чрезъ первой членъ a дѣлителя; частное a напиши по правую сторону за чертою, потомъ умножь всего дѣлителя $a - b$ найденнымъ количествомъ a, произведеніе

$$a - b)\ a^2 - 2ab + b^2\ (a - b \text{ частн.}$$
$$a^2 - ab$$
$$\overline{-ab + b^2}$$
$$-ab + b^2$$
$$\overline{0}$$

$a^2 - ab$

$a^2 - ab$ вычти изъ дѣлимаго; написавши остатокъ подъ чертою, раздѣли первой членъ остатка $-ab$ чрезъ первой членъ a дѣлителя; частное $-b$ припиши къ величинѣ a, потомъ умножь найденнымъ количествомъ $-b$ дѣлителя $a-b$, произведенiе $-ab+b^2$ вычти изъ остатка; и такъ частное будетъ $= a-b$. А чтобъ увѣриться, что $a-b$ есть частное, то умножь оное дѣлителемъ, произведенiе $(a-b).(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$ будетъ дѣлимое.

Примѣръ II.

Дабы раздѣлить количество $a^3 + b^3$ чрезъ $a + b$, то написавши оное, какъ слѣдуетъ, раздѣли, какъ и прежде, количество a^3 на a, частное a^2 поставя на своемъ мѣстѣ, умножь имъ дѣлителя, произведенiе $a^3 + a^2 b$ вычти изъ дѣлимаго; но какъ въ вычитаемомъ количествѣ знаки перемѣняются въ противные, то остатокъ будетъ $-a^2b+b^3$, которой написавши подъ чертою, раздѣли $-a^2b$ чрезъ первой членъ a дѣлителя; частное $-ab$ поставя подлѣ найденнаго количества a^2, умножь симъ количествомъ $-ab$ дѣлителя, произведенiе $(a+b)\times -ab = -a^2b - ab^2$, вычти изъ $-a^2b+b^3$, остатокъ $+ab^2+b^3$ напиши подъ чертою; наконецъ первой членъ остатка $+ab^2$ раздѣли на первой

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,a^3+b^3\,(a^2-ab+b^2 = \text{част.} \\
\quad a^3+a^2b \\
\hline
\quad -a^2b+b^3 \\
\quad -a^2b-ab^2 \\
\hline
\qquad +ab^2+b^3 \\
\qquad +ab^2+b^3 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

первой членъ a дѣлителя, частное будетъ b^2, которое, приписавши къ двумъ первымъ членамъ частнаго, умножь симъ количествомъ дѣлителя, произведенie $ab^2 + b^3$ вычти изъ оставшагося количества $ab^2 + b^3$, остатокъ будетъ $= 0$; а требуемое частное будетъ $a^2 - ab + b^2$.

Примѣръ III.

Раздѣлить $9a^2 - 6ab + b^2$ на $3a - b$.

$3a - b)\ 9a^2 - 6ab + b^2 (3a - b$ частн.

произв. дѣл. на $3a = 9a^2 - 3ab$

остатокъ $= - 3ab + b^2$

произв. дѣлит. на $-b = - 3ab + b^2$

Примѣръ IV.

$8a^3 - b^3$ раздѣлить на $2a - b$.

$2a - b)\ 8a^3 - b^3 (4a^2 + 2ab + b^2$ частн.

$8a^3 - 4a^2b$

остатокъ $= + 4a^2b - b^3$

$+ 4a^2b - 2ab^2$

остатокъ $= + 2ab^2 - b^3$

$+ 2ab^2 - b^3$

0

Примѣръ V.

Раздѣлить $a^8 - b^8$ на $a^2 - b^2$.

$a^2 - b^2)\ a^8 - b^8 (a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6$ частное.

$a^8 - a^6b^2$

$a^6b^2 - b^8$

$a^6b^2 - a^4b^4$

$a^4b^4 - b^8$

 $a^4b^4 - a^2b^6$

$$a^4b^4 - a^2b^6$$

$$a^2b^6 - b^8$$
$$a^2b^6 - b^8$$

$$0$$

Примѣръ VI.

$$c^2 + 2b - 1)\, c^4 - bc^2 - 6b^2 + 5b - 1\, (c^2 - 3b + 1$$

$$c^4 + 2bc^2 - c^2$$ частное

$$-3bc^2 + c^2 - 6b^2 + 5b - 1$$
$$-3bc^2 \ldots\ldots - 6b^2 + 3b$$

$$c^2 \ldots\ldots + 2b - 1$$
$$c^2 \ldots\ldots + 2b - 1$$

$$0$$

Примѣръ VII.

$$1-2x+x^2 \;|\; 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5 \;|\; 1-3x+3x^2-x^3$$

$$1-2x+x^2$$ частное.

$$-3x+9x^2-10x^3$$
$$-3x+6x^2-3x^3$$

$$3x^2-7x^3+5x^4$$
$$3x^2-6x^3+3x^4$$

$$-x^3+2x^4-x^5$$
$$-x^3+2x^4-x^5$$

$$0$$

§ 31. **Примѣч.** Ежели въ членахъ дѣлимаго и дѣлителя будетъ одна буква изъявлять разныя степени, то должно разположить члены оныхъ количествъ въ разсужденіи разныхъ степеней той буквы, поставляя сперва тотъ членъ

членъ, въ которомъ буква съ большимъ показателемъ, а вторымъ членомъ ту величину, у которой та же буква имѣетъ показателя, меньше перваго и такъ далѣе, *на примѣръ*: ежели должно будетъ раздѣлить $22a^4b + 9ab^4 + 12a^2b^3 + 19a^3b^2 + 8a^5$ на $4a^3 + 2ab^2 + 3b^3 + 5a^2b$, то надлежитъ дѣлимое въ разсужденіи буквы a расположить такимъ порядкомъ: $8a^5 + 22a^4b + 19a^3b^2 + 12a^2b^3 + 9ab^4$; дѣлителяжъ $4a^3 + 5a^2b + 2ab^2 + 3b^3$, а потомъ производить дѣленіе какъ и прежде.

$4a^3+5a^2b$	$8a^5+22a^4b+19a^3b^2+12a^2b^3+9ab^4$	$2a^2+3ab$
$+2ab^2+3b^3$	$8a^5+10a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3$	
	$12a^4b+15a^3b^2+6a^2b^3+9ab^4$	
	$12a^4b+15a^3b^2+6a^2b^3+9ab^4$	
	0	

§ 32. **Задача.** Даннаго количества найти всѣхъ дѣлителей.

Рѣшен. Положимъ, что требуется найти количества $x^3p + x^2p$ всѣхъ дѣлителей; то сперва раздѣли члены сего количества чрезъ простаго дѣлителя p, частное будетъ $x^3 + x^2$, которое раздѣли чрезъ простаго дѣлителя x, частное будетъ $x^2 + x$, что также раздѣли еще на x, частное будетъ $x + 1$; напослѣдокъ раздѣли сіе количество на $x + 1$, частное будетъ 1; такимъ образомъ найденные дѣлители $p, x, x, x + 1$ именуются *простые*; а чтобы найти сложныхъ дѣлителей, то умножь простыхъ дѣлителей по два сряду между собою, коихъ произведенія $px, px + p, x^2, x^2 + x$ будутъ

дутъ дѣлители двойные; потомъ умножь по три, то сыщутся тройные дѣлители px^2, $px^2 + px$, $x^3 + x^2$, и наконецъ умножь по четыре, будетъ $px^3 + px^2$; и такъ требуемые дѣлители суть p, x, $x + 1$, px, $px + p$, x^2, $x^2 + x$, px^2, $px^2 + px$, $x^3 + x^2$, $px^3 + px^2$, изъ коихъ на каждаго данное количество безъ остатка раздѣлено быть можетъ.

§ 33. *Прибавлен.* Положимъ, что требуется сыскать всѣхъ дѣлителей числа 30: для сего раздѣли число 30 на 2, частное будетъ 15, которое раздѣля на 3, частное 5 раздѣли на 5, въ частномъ будетъ 1. И такъ простые дѣлители числа 30 будутъ 1, 2, 3 и 5; но дабы найти сложныхъ дѣлителей, то умножа изъ найденныхъ дѣлителей по 2, сыщутся новые дѣлители, 6, 10 и 15; наконецъ умножь простыхъ дѣлителей по 3, произведеніе будетъ 30; и такъ требуемые дѣлители числа 30 будутъ слѣдующія: 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30, изъ коихъ на каждаго число 30 безъ остатка раздѣлено быть можетъ.

О дробяхъ или ломаныхъ числахъ.

§ 34. *Опредѣлен.* Когда частнаго цѣлымъ количествомъ изобразить не можно, тогда оное изображается дробью, *на примѣръ*: ежели должно будетъ раздѣлить количество b на d, то частное $\frac{b}{d}$ называется *дробь* или *ломаное число*. Количество d означаетъ, на сколько частей цѣлое число раздѣлено, и называется *знаменатель*,

тель, а верьхнее b, показываетъ, сколько тѣхъ частей изъ цѣлаго взято, и именуется *числитель*, (*Томъ I.* § 69).

§ 35. *Теорема.* Величина дроби не перемѣнится, когда числитель и знаменатель на какое нибудь количество умножится.

Доказат. Представимъ себѣ, что дробь $\frac{a}{b} = c$: и такъ когда каждое изъ сихъ равныхъ количествъ умножится чрезъ b, то первое произведенiе будетъ a (поелику произведенiе частнаго $\frac{a}{b}$ на дѣлителя b равно дѣлимому a (§ 23) равно второму bc; потомъ естьли сiи количества умножатся произвольною величиною, *на примѣръ* n, то произведенiе an будетъ равно bnc (*Часть* I §35), по раздѣленiиж сихъ количествъ чрезъ bn, частное $\frac{an}{bn}$ будетъ $= c = \frac{a}{b}$; слѣдовательно величина дроби не перемѣнится, когда числитель и знаменатель какимъ нибудь количествомъ умножится, то есть $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

$$\begin{array}{l} \frac{a}{b} = c \\ \times b = \times b \\ \hline a = bc \\ n = n \\ \hline an = bnc \\ :bn = :bn \\ \hline \frac{an}{bn} = c = \frac{a}{b} \end{array}$$

Слѣдст. Изъ сего удобно можно видѣть, что величина дроби не перемѣнится, когда числитель и знаменатель на какое нибудь количество раздѣлится, что всего легче усмотрѣть можно изъ изображенной дроби $\frac{an}{bn}$; ибо по раздѣленiи

числителя и знаменателя на n, будетъ дробь $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = c$.

§ 36. *Задача*. Данныя дроби, имѣющія разныхъ знаменателей, привесть къ одинакому знаменателю.

Рѣшен. I. Ежели будетъ только двѣ дроби; то числителя и знаменателя первой дроби умножь знаменателемъ другой, а числителя и знаменателя второй дроби знаменателемъ первой, будешь имѣть дроби съ одинакими знаменателями, даннымъ равныя, *на примѣръ*: ежели даны будутъ дроби $\frac{b}{d}$ и $\frac{x}{p}$, то будетъ $\frac{b}{d} \times p = \frac{bp}{dp}$, и $\frac{x}{p} \times d = \frac{dx}{dp}$ (§ 35). Также и $\frac{m}{3}$, $\frac{5cd}{n}$ приведены къ одному знаменателю $\frac{mn}{3n}$, $\frac{15cd}{3n}$

2. Для приведенія нѣсколькихъ дробей къ одному знаменателю, умножь числителя и знаменателя каждой дроби произведеніемъ знаменателей прочихъ дробей, отъ чего произшедшія дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, *на примѣръ*: ежели будутъ дроби $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{x}{p}$, то умножь числителя и знаменателя дроби $\frac{b}{a}$ произведеніемъ np знаменателей двухъ послѣднихъ дробей, будетъ $\frac{b}{a} = \frac{bnp}{anp}$; потомъ числителя и знаменателя дроби $\frac{c}{n}$ умножь произведеніемъ

ніемъ ap знаменателей прочихъ дробей, будетъ $\frac{c}{n} = \frac{cap}{nap}$, и наконецъ числителя и знаменателя дроби $\frac{x}{p}$ умножь произведеніемъ an знаменателей прочихъ дробей, будетъ $\frac{x}{p} = \frac{xan}{pan}$; такимъ образомъ приведенныя дроби къ одному знаменателю, даннымъ равныя, суть слѣдующія: $\frac{bnp}{anp}$, $\frac{cap}{anp}$, $\frac{xan}{anp}$.

Равнымъ образомъ приведутся къ одинакому знаменателю и слѣдующія дроби: $\frac{a}{b}$, $\frac{2c}{d}$, $\frac{e}{3n}$.

$$\frac{\frac{a}{b},\ \frac{2c}{d},\ \frac{e}{3n}}{\frac{3adn}{3bdn},\ \frac{6bcn}{3bdn},\ \frac{bed}{3bdn}} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{2x+b}{3a},\ \frac{2r-d}{ec}}{\frac{2ecx+bec}{3ace},\ \frac{6ar-3ad}{3ace}}$$

Доказат. Справедливость помянутыхъ рѣшеній усмотрѣть можно изъ того, что числитель и знаменатель каждой дроби умножаемы были однимъ количествомъ; слѣдовательно приведенныя дроби равны даннымъ (§ 35).

§ 37. *Задача.* Данную дробь, не перемѣняя ея величины, представить (естьли можно) въ меньшемъ количествѣ буквъ.

Рѣшен. Числителя и знаменателя данной дроби раздѣли на такую букву, которая находится въ числителѣ и знаменителѣ, чрезъ что получишь требуемую дробь, *на примѣръ*: ежели будетъ дробь $\frac{ab}{ac}$, то раздѣли числителя

и знаменателя на a, будетъ $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ (§ 35 слѣд.)

Также дробь $\frac{bnd}{cnd}$ по раздѣленіи числителя и знаменателя чрезъ nd будетъ $=\frac{b}{c}$.

§ 38. *Задача*. Данное цѣлое количество съ дробью, *на примѣръ*, $ab+\frac{c}{q-3}$, представить въ одной дроби.

Рѣшен. Цѣлое количество ab умножь знаменателемъ $q-3$, потомъ соединя сіе произведеніе съ числителемъ c, подпиши тогожъ знаменателя; будешь имѣть требуемую дробь, какъ изъ слѣдующаго видно:

$$ab+\frac{c}{q-3}$$

$$\frac{ab.(q-3)+c}{q-3}=\frac{abq-3ab+c}{q-3}=ab+\frac{c}{q-3}.$$

О сложеніи Алгебраическихъ дробей.

§ 39. *Задача*. Данныя дроби сложить.

Рѣшен. I. Ежели данныя дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, то соединя числителей подлежащими знаками, подъ суммою ихъ подпиши того же знаменателя; получишь сумму дробей, *на примѣръ*: сумма дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{cd}{b}$ и $\frac{mn}{b}$ будетъ $\frac{a}{b}+\frac{cd}{b}+\frac{mn}{b}=\frac{b+cd+mn}{b}$.

2.

2. Ежели дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то приведя ихъ сперва къ одинакому знаменателю, сложи какъ и прежде, и естьли можно, сдѣлай сокращенiе; получишь требуемую сумму дробей, *на примѣръ*: $\frac{a}{b}$ сложить съ $\frac{c}{d}$, сумма будетъ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Такимъ же образомъ слагаются и прочiя дроби, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

Сложить $\frac{a}{a-b}$ съ $\frac{b}{a+b}$.

$$\left(\frac{a}{a-b}\right) + \left(\frac{b}{a+b}\right)$$

$$\frac{a^2 + ab + ab - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2} = \text{сум. дроб.}$$

Примѣръ II.

Дроби $3a^2 - \frac{b^3}{2a}$, $\frac{2a^2}{3}$ и $\frac{3b^3}{5a}$ сложить.

$$\left(3a^2 - \frac{b^3}{2a}\right) + \frac{2a^2}{3} + \frac{3b^3}{5a}$$

$$\frac{90a^4 - 15ab^3 + 20a^4 + 18ab^3}{30a^2} = \frac{110a^4 + 3ab^3}{30a^2} = \frac{110a^3 + 3b^3}{30a} =$$

суммѣ дробей.

Примѣръ III.

Дроби $\frac{3a + 2ab + 2b}{2a - b}$ и $\frac{4a - 3ab + 3b}{4a + b}$ сложить.

$$\left(\frac{3a + 2ab + 2b}{2a - b}\right) + \left(\frac{4a - 3ab + 3b}{4a + b}\right)$$

$12a^2 + 8a^2b + 8ab$
$3ab + 2ab^2 + 2b^3$
$8a^2 - 6a^2b + 6ab$
$- 4ab + 3ab^2 - 3b^2$

$$\frac{20a^2 + 2a^2b + 13ab + 5ab^2 - b^2}{8a^2 - 2ab - b^2} = \text{суммѣ дан. дробей.}$$

О вычитанiи Алгебраическихъ дробей.

§ 40. **Задача.** Данную дробь вычесть изъ другой.

Рѣшен. I. Ежели дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, то числителя одной дроби вычти изъ числителя другой (§ 16); подъ разностiю напиши тогожъ знаменателя, получить требуемую разность, *на примѣръ*: изъ $\frac{a}{b}$ вычесть $\frac{c}{b}$ разность будетъ $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$; также и $\frac{m}{de}$ безъ $\frac{ac}{dc}$ будетъ $\frac{m}{de} - \frac{ac}{de} = \frac{m-ac}{de}$.

2 Когда данныя дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то приведя ихъ къ одинакому знаманателю (§ 36.); вычти числителя одной дроби изъ числителя другой, а подъ остаткомъ напиши общаго ихъ знаменателя; будешь имѣть искомую разность дробей, *на примѣръ*: изъ $\frac{a}{b}$ вычесть $\frac{c}{d}$, изъ коихъ по приведенiи къ одному знаменателю, будетъ дробь $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ и $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ (§ 36), и такъ искомая разность будетъ $\frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

Такимъ же образомъ вычитаются и прочія дроби, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ усмотрѣть можно:

Примѣръ I.

Изъ $a+\frac{c}{b}$ вычесть $\frac{m}{2d}$.

$$a+\frac{c}{b}$$

$$\left(\frac{ab+c}{b}\right)-\frac{m}{2d}$$

$$\frac{2abd+2cd-bm}{2bd} = \text{разнос.} = a+\frac{c}{b}-\frac{m}{d}.$$

Примѣръ II.

Изъ $\frac{4a-2b}{5a}$ вычесть $\frac{2a-b}{3a}$.

$$\left(\frac{4a-2b}{5a}\right)-\left(\frac{2a-b}{3a}\right)$$

$12a^2-6ab =$ прозв. числ. 1 й дроб. на знам. 2й

$10a^2-5ab =$ произ. числ. 2 й дроб. на знам. 1й

$\frac{2a^2-ab}{15a^2} = \frac{2a-b}{15a} =$ разности.

Примѣръ III.

Изъ $\frac{3a^2-b}{4a+b}$ вычесть $\frac{2b}{a+b}+a$.

$$\left(\frac{3a^2-b}{4a+b}\right)-\left(\frac{2b+a^2+ab}{a-b}\right)$$

$3a^3-ab-3a^2b+b^2$

$4a^3+8ab+4a^2b+2b^2+a^2b+ab^2$

$$\frac{-a^3-9ab-7a^2b-b^2-a^2b-ab^2}{4a^2-3ab-b^2} = \frac{-a^3-9ab-8a^2b-b^2-ab^2}{4a^2-3ab-b^2}$$

разн.

Примѣръ IV.

изъ $\frac{5b - d}{2b + 2d}$ вычесть $\frac{2b + 2d}{3d - 2b}$.

$$\left(\frac{5b - d}{2b + 2d}\right) - \left(\frac{2b + 2d}{3b - 2d}\right)$$

$$15b^2 - 13bd + 2d^2$$
$$4b^2 + 8bd + 4d^2$$

$\frac{11b^2 - 21bd - 2d^2}{6b^2 + 2bd - 4d^2}$ = разности.

О умноженіи дробей цѣлымъ количествомъ.

§ 41. *Задача.* Умножить дробь цѣлымъ числомъ.

Рѣшен. Данной дроби числителя умножь цѣлымъ количествомъ, а подъ произведеніемъ напиши того же знаменателя; получишь требуемое произведеніе, *на примѣръ*: $\frac{3}{4}$ умножить чрезъ 5, произведеніе будетъ $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; также и $\frac{c}{d} \times a = \frac{ac}{d}$.

Доказат. Понеже умножить не что иное, какъ данную дробь увеличить во столько разъ, сколько цѣлое количество единицъ въ себѣ заключаетъ; слѣдственно должно было только число частей данной дроби, то есть числителя умножить, а знаменателя, яко именованіе дроби, такогожъ написать. ч. д. н.

Примѣръ I.

Дробь $\frac{ac}{4bd}$ умножить чрезъ $2b$; произведеніе будетъ $\frac{ac}{4bd} \times 2b = \frac{2abc}{4bd} = \frac{ac}{2d}$.

Слѣд-

Слѣдст. Изъ сего видно, что при умноженіи данной дроби цѣлымъ количествомъ, или числителя умножь, или знаменателя, когда можно будетъ, раздѣли на данное цѣлое число, получишь требуемое произведеніе, *на примѣръ*: $\frac{2c}{5n^3} \times 5n^2 = \frac{2c}{n}$.

Примѣръ II.

Дробь $\frac{c}{d}$ умножить цѣлымъ количествомъ $n+d$.

$\frac{c}{d} \times (n+d) = \frac{nc+dc}{d} =$ произвед.

Примѣръ III.

$\left(\frac{a+b}{c}\right) \times (a-b) = \frac{a^2+ab-ab-b^2}{c} = \frac{a^2-b^2}{c} =$ произв.

Примѣръ IV.

$\left(\frac{a^2-b^2}{3c-d}\right) \times (2a^2+2b^2) = \frac{2a^4-2a^2b^2+2a^2b^2-2b^4}{3c-d} = \frac{2a^4-2b^4}{3c-d}$ произв.

О Дѣленіи дробей на цѣлыя количества.

§ 42. *Задача.* Данную дробь раздѣлить на цѣлое количество.

Рѣшен. I. Раздѣля данной дроби числителя на цѣлое количество, подъ частнымъ числомъ поставь того же знаменателя, получишь искомое частное количество, *на примѣръ*: $\frac{8}{9}$ раздѣлить на 4, частное будетъ $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$; также ежели дробь $\frac{2cb}{a-b}$ раздѣлится на b, то частное будетъ $\frac{2bc}{a-b} : b = \frac{2c}{a-b}$.

Доказат. Поелику числитель, то есть число частей составляющихъ дробь, раздѣленъ на столько частей, сколько дѣлитель единицъ въ себѣ заключаетъ; по сему должно было знаменателя, яко именованіе дроби, написать того же; слѣдовательно отъ такого раздѣленія произшедшая дробь есть искомое частное.

Рѣшен. 2. Ежели числитель данной дроби на цѣлое число раздѣлиться не можетъ; тогда умножь знаменателя дроби дѣлителемъ, надъ симъ произведеніемъ написавъ того же числителя, получишь требуемое частное, *на примѣръ*: ежели дробь $\frac{a}{c}$ раздѣлится на d, то частное будетъ $\frac{a}{c}:d=\frac{a}{dc}$; также и $\frac{n}{a}:(c-d)=\frac{n}{ac-ad}$ частное. Равнымъ образомъ и $\frac{3}{5}:4=\frac{3}{20}$ (*Часть* I § 102.)

Доказат. Дабы доказать истинну сего рѣшенія, то умножь числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{c}$ дѣлителемъ d, отъ чего произшедшая дробь $\frac{a}{c}\times d=\frac{ad}{dc}$ будетъ равна $\frac{a}{c}$ (§ 35); и такъ по раздѣленіи числителя сей новой дроби $\frac{ad}{dc}$ на цѣлое число d по первому рѣшенію, частное будетъ $\frac{ad}{cd}:d=\frac{a}{cd}$, тожъ самое, какое произошло отъ умноженія знаменателя дѣлителемъ d, то есть $\frac{a}{c}:d=\frac{a}{dc}$; слѣдственно произшедшая помянутымъ образомъ дробь $\frac{a}{dc}$ есть требуемое частное.

§ 43.

§ 43. *Слѣдст.* Изъ сего явствуетъ: когда данную дробь должно будетъ раздѣлить на цѣлое число, то или числителя раздѣли, или знаменателя умножь цѣлымъ количествомъ; будешь имѣть въ обѣихъ случаяхъ требуемое частное число, *на примѣръ*: $\frac{a^2}{x} : a = \frac{a}{x}$; тожъ произойдетъ частное, ежели данной дроби, вмѣсто того, чтобы дѣлить числителя, умножится знаменатель, а числитель поставится тотъ же, то есть $\frac{a^2}{x} : a = \frac{a^2}{ax} = \frac{a}{x}$ (§ 35. Слѣд.)

Такимъ же образомъ дѣлятся и прочія дроби, какъ изъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

Дробь $\frac{bc}{a+d}$ раздѣлить на $c-d$

$$\left(\frac{bc}{a+d}\right) : (c-d) = \frac{bc}{ac+cd-ad-d^2}$$ есть част.

Примѣръ II.

$$\left(\frac{m^2-n^2}{c^2}\right) : (m+n) = \frac{m-n}{c^2},$$ есть частное отъ раздѣленія числителя на цѣлое количество $m+n$.

Примѣръ III.

$\frac{mc^2+b^2}{c-b}$ раздѣлить на $a+b$

$$\left(\frac{mc^2+b^2}{c-b}\right) : (a+b) = \frac{mc^2+b^2}{ac-ab+bc-b^2} = \text{част.}$$

О умноженіи дроби дробью.

§ 44. *Задача.* Данную дробь умножить другою.

Рѣшен. Умножь числителя одной дроби числителемъ другой, и знаменателя первой знаменателемъ второй; подъ произведенiемъ числителей напиши произведенiе знаменателей: будешь имѣть искомое произведенiе, *на примѣръ*: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, есть требуемое произведенiе.

Доказат. Ибо ежели данная дробь $\frac{a}{b}$, умножится сперва однимъ количествомъ c, то произведенiе $\frac{ac}{b}$ будетъ больше подлиннаго; поелику должно умножить не на цѣлое количество c, но на c раздѣленное на d; по сей причинѣ произведенiе $\frac{ac}{b}$ надлежитъ раздѣлить на d, отъ чего произшедшее частное $\frac{ac}{bd}$ (§ 42.) будетъ подлинное произведенiе. Ч. д. н.

Такимъ же образомъ и прочiя дроби одна другою умножаются, какъ слѣдуетъ:

Примѣръ I.

Дробь $\frac{a+b}{2d}$ умножить дробью $\frac{a-b}{3c}$

$$\left(\frac{a+b}{2d}\right) \times \left(\frac{a-b}{3c}\right) = \frac{a^2+ab-ab-b^2}{6cd} = \frac{a^2-b^2}{6cd} = \text{произ.}$$

Примѣръ II.

$$\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{2d} \times \frac{c-d}{a+b} = \frac{a^2bc-a^2bd}{2acd+2bcd} = \text{произвед.}$$

Примѣръ III.

$$\left(\frac{c+2n}{a+b}\right) \times \left(\frac{2c-m}{2p+d}\right) = \frac{2c^2+4cn-cm-2nm}{2ap+2bp+ad+bd} \text{ произв.}$$

О дѣленіи дробей чрезъ дробь.

§ 45. *Задача.* Данную дробь раздѣлить на другую.

Рѣшен. I. Ежели данныя дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей, то раздѣля числителя дѣлимой дроби на числителя другой, частное число покажетъ, сколько разъ одна дробь содержится въ другой, *на примѣръ*: $\frac{8}{9} : \frac{2}{9}$, частное будетъ $\frac{8}{2} = 4$; также естьли дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлится на $\frac{c}{b}$, то частное будетъ $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$.

2. Когда данныя дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то сперва приведи ихъ къ одному знаменателю, а потомъ, какъ и прежде раздѣля числителя дѣлимой дроби на числителя дѣлящей, получишь частное, *на примѣръ*: дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлить на $\frac{c}{d}$; то приведя ихъ къ одному знаменателю, будетъ $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ (§ 36); и такъ частное будетъ $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, также $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} : \frac{4}{6} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ частное.

Доказат. Ибо раздѣлить не что иное, какъ узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, но числа одинакихъ частей, составляющихъ дроби, суть ихъ числители; слѣдовательно должно было раздѣлить только числителя дѣлимой дроби на числителя дѣлящей, то есть познать, сколько разъ число частей одной дроби, содержится въ числѣ частей дру-

гой; по сей причинѣ, знаменатели яко имена дробей, въ дѣленіе входить не должны.

§ 46. *Слѣдствіе.* Изъ втораго рѣшенія удобно можно видѣть, что произведеніе ad, числителя a дѣлимой дроби, на знаменателя d дѣлящей, есть числитель, а произведеніе bc числителя c дѣлящей, на знаменателя b дѣлимой дроби, есть знаменатель частнаго количества; слѣдовательно частное число можетъ быть изображено одними только помянутыми произведеніями, безъ общаго знаменателя дробей, какъ слѣдуетъ: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

$\frac{ad}{bc}$ частное, то же, что и прежде.

Примѣръ I.

Раздѣлить дробь $\frac{a-c}{n}$ на $\frac{a+c}{2n}$.

$$\left(\frac{a-c}{n}\right) : \left(\frac{a+c}{2n}\right)$$

$$\frac{2an-2cn}{an+nc} = \frac{2a-2c}{a+c} = \text{частному.}$$

Примѣръ II.

Дробь $\frac{4a-b}{2c-b}$ раздѣлить на $2a-\frac{a}{3b}$.

$$\left(\frac{4a-b}{2c-b}\right) : \left(2a-\frac{a}{3b}\right)$$

$$\left(\frac{4a-b}{2c-b}\right) : \left(\frac{6ab-a}{3b}\right)$$

$$\frac{12ab-3b^2}{12abc-2ac-6ab^2+ab} = \text{частному.}$$

При-

Примѣръ III.

Дробь $\frac{2}{3}ab - \frac{a}{a-b}$ раздѣлить на $\frac{2}{3}a - b$.

Здѣсь сперва должно дроби составляющія дѣлимое количество, привесть къ одному знаменателю, а дробь означающую дѣлителя, представить одною дробью, а потомъ уже раздѣлить какъ въ предъидущихъ примѣрахъ показано:

$$\left(\frac{2ab}{3} - \frac{a}{a-b}\right) : \left(\frac{2a}{3} - b\right)$$

$$\left(\frac{2a^2b - 2ab^2 - 3a}{3a - 3b}\right) : \left(\frac{2a - 3b}{3}\right)$$

$$\frac{6a^2b - 6ab^2 - 9a}{6a^2 - 9ab - 6ab + 9b^2} = \frac{6a^2b - 6ab^2 - 9a}{6a^2 - 15ab + 9b^2}$$ частн.

Примѣръ IV.

Дробь $\left(\frac{2}{3}a - \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{2}{3}b - 3c}\right)$ раздѣлить на $\left(\frac{\frac{1}{2}b}{a - \frac{2}{3}b}\right)$.

Сперва раздѣля въ числителѣ дѣлимой дроби $\frac{1}{2}b$ на $\frac{2}{3}b - 3c$, вычти изъ $\frac{2}{3}a$, получишь дѣлимую дробь; потомъ раздѣля также числителя $\frac{1}{2}b$ дѣлящей дроби на $a - \frac{2}{3}b$, будешь имѣть дѣлящую дробь, и наконецъ соверши дѣленіе данныхъ дробей, какъ и прежде.

$$\frac{1}{2}b : \frac{2}{3}b - 3c \qquad \frac{1}{2}b : a - \frac{2}{3}b$$

$$\frac{b}{2} : \frac{2b - 9c}{3} \qquad \frac{b}{2} : \frac{3a - 2b}{3}$$

$\frac{3b}{4b - 18c}$ сіе частное вычти $\frac{3b}{6a - 4b}$ дѣлитель.

изъ $\frac{2a}{3}$, остатокъ будетъ

$\frac{2a}{3} - \frac{3b}{4b - 18c} = \frac{8ab - 36ac - 9b}{12b - 54c}$ дѣлимая дробь.

И такъ будетъ:

$$\frac{\left(\frac{8ab-36ac-9b}{12b-54c}\right):\left(\frac{3b}{6a-4b}\right)}{}$$

$$\frac{48a^2b-216a^2c-54ab-32ab^2+144acb+36b^2}{36b^2-162bc}$$ частное.

О разрѣшеніи дробей на безконечные ряды.

§ 47. *Опредѣл.* Разрѣшеніе дробей на безконечные ряды есть способъ, посредствомъ котораго изображается дробь въ произвольномъ числѣ членовъ, такъ что сумму ихъ вообще можно принять безъ чувствительной погрѣшности за подлинное частное, данную дробь изображающее.

§ 48. *Положен.* Безконечно большое число означается слѣдующимъ знакомъ (∞); изъ сего видно, что безконечно большая величина дробью изображенная, представиться можетъ чрезъ $\frac{\infty}{1}$; напротивъ того безконечно малая часть, или ничего, изобразится чрезъ $\frac{1}{\infty}$.

§ 49. *Задача.* Данную дробь $\frac{1}{1-a}$ изобразить безконечнымъ рядомъ.

Рѣшен. раздѣли числителя 1 цу на знаменателя $1-a$, въ частномъ числѣ первой членъ будетъ 1; потомъ остатокъ a, раздѣли на первой членъ дѣлителя, въ частномъ будетъ a вторымъ членомъ, коимъ умножа дѣлителя, произведеніе $a-a^2$ вычти изъ a, останется a^2, которое, также раздѣля на первой членъ дѣлителя, въ частномъ числѣ будетъ третій членъ a^2, и такъ сіе дѣйствіе, продолжая далѣе непрестанно, превратится данная дробь $\frac{1}{1-a}$ въ безконечной рядъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$1-a)$

$$1-a)1\ldots(1+a+a^2+a^3+a^4+\cdots a^n=\frac{1}{1-a}$$

$$\begin{array}{l} 1-a \\ \hline +a \\ a-a^2 \\ \hline +a^2 \\ a^2-a^3 \\ \hline +a^3 \\ a^3-a^4 \\ \hline +a^4 \\ a^4-a^5 \\ \hline +a^5 \\ a^5-a^6 \\ \hline \frac{a^6}{1-a} \end{array}$$

и прочая.

$$\text{-----}\ \frac{a^n}{1-a}=\frac{\infty}{1-a}$$

Доказат. Дабы вывесть изъ сомнѣнія, что безконечный рядъ частнаго равенъ предложенной дроби; то положимъ $a=1$, отъ чего выдетъ нашъ рядъ $1+1+1+1+1$ и такъ безконечно $=\frac{\infty}{1}$, которой данной дроби $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-1}$, то есть $\frac{1}{0}$ равенъ быть долженъ. Но поелику 1 раздѣленная на 0, въ частномъ числѣ производитъ безмѣрно великое число; ибо ежели представимъ себѣ, что безмѣрно малое количество будетъ $\frac{1}{10000000000000}=\frac{1}{\infty}$ по положенію, которое за нуль или за ничто почесть можно, и такъ когда 1ца раздѣлится на сїе безмѣрно малое количество, то есть на $\frac{1}{\infty}$ или на 0, то частное число будетъ $1:\frac{1}{\infty}=\frac{\infty}{1}$ безконечно большая величина, составляющая безконечной рядъ частнаго, равнаго $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-1}$ $=\frac{1}{0}$. Ч. д. н.

§ 50. *Прибавлен*. Естьли положимъ $a = 2$, то будетъ рядъ изображающiй помянутую дробь $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ и такъ безконечно, который долженъ быть $= \frac{1}{1-2}$, то есть, $\frac{1}{-1} = -1$, что кажется не вѣроятно. Но при семъ надлежитъ примѣчать, что ежели въ предписанномъ ряду должно будетъ остановиться у 64, то къ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, должно еще придать оставшуюся отъ дѣленiя дробь $\frac{128}{1-2} = \frac{128}{-1} =$ ю -128; отъ чего произойдетъ $127 - 128 = -1 =$ предложенной дроби $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}$

Примѣчан. I е. Когда вмѣсто a возмутся числа меньше единицы, *на прим*: $a = \frac{1}{2}$, то будетъ $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 2$, которое слѣдующему ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} +$ и проч. безконечно $+ \frac{1}{\infty}$ равно быть должно. И такъ когда изъ сихъ членовъ возмутся только 3, то есть $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, то не достанетъ $\frac{1}{4}$; когда же возмутся 4, то сумма ихъ будетъ $1\frac{7}{8}$, гдѣ не достанетъ $\frac{1}{8}$; 5 же членовъ вмѣстѣ, составятъ сумму $1\frac{15}{16}$, гдѣ не достанетъ еще $\frac{1}{16}$; изъ сего удобно можно видѣть, чѣмъ больше взято будетъ членовъ, тѣмъ недостатокъ будетъ меньше; слѣдовательно, ежели рядъ продолжится безконечно, то совсѣмъ никакого недостатка не будетъ.

II. Ежели положимъ $a = \frac{1}{3}$, то будетъ дробь $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, а безконечный рядъ изображающiй оную, будетъ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{\infty}$. И такъ когда возмется 3 члена, то сумма ихъ $1\frac{4}{9}$ будетъ $\frac{1}{9}$ ю меньше предложенной дроби $1\frac{1}{2}$; а въ суммѣ 4 хъ членовъ $1\frac{13}{27}$ не достанетъ еще $\frac{1}{54}$; изъ сего видно, чѣмъ

больше

больше взято будетъ членовъ, тѣмъ погрѣшность будетъ втрое меньше предъидущей разности, слѣдовательно наконецъ оная уничтожится.

III Пусть будетъ $a = \frac{1}{4}$, то будетъ дробь $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$, а безконечный рядъ изображающій оную дробь, будетъ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \ldots \frac{1}{\infty}$, изъ котораго ежели возмется три члена, то сумма ихъ $1\frac{5}{16}$ будетъ $\frac{1}{48}$ю частію меньше предложенной дроби $1\frac{1}{3}$; а въ суммѣ 4 хъ членовъ $1\frac{21}{64}$ не достанетъ еще $\frac{1}{192}$, слѣдовательно наконецъ оной недостатокъ уничтожится.

§ 51. Равнымъ образомъ и сія дробь $\frac{1}{1+a}$ обратится въ безконечный рядъ, когда числитель 1 на знаменателя $1+a$ безконечно дѣлиться будетъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$$1+a)\,1 \ast\ast\ast\ast(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 \text{ и проч.}$$

$$\begin{array}{l}
1+a \\
\hline
-a \\
-a-a^2 \\
\hline
+a^2 \\
a^2+a^3 \\
\hline
-a^3 \\
-a^3-a^4 \\
\hline
+a^4 \\
a^4+a^5 \\
\hline
-a^5 \\
-a^5-a^6 \\
\hline
+a^6 \text{ и проч.}
\end{array}$$

И такъ предложенная дробь $\frac{1}{1+a}$ равна сему безконечному ряду $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$ и проч. Ежели положимъ $a=1$,

$a = 1$, то изобразится сiе примѣчанiя достойное уравненiе $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ и проч. безконечно, что кажется не можетъ быть справедливо; ибо когда рядъ кончится на -1, то выйдетъ 0, а естьли на $+1$ остановится, то выйдетъ 1; однакожъ естьли вообразимъ, что помянутое дѣленiе продолжаться будетъ безконечно, не останавливаяся ни при -1, ниже при $+1$: то тогда сумма будетъ ни 1, ни 0, но среднее между ими выйдетъ $\frac{1}{2}$.

§ 52 *Прибавлен.* Iе. Пусть будетъ $a = \frac{1}{2}$, то предложенная дробь $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$, равна будетъ слѣдующему ряду: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - - - - . - \frac{1}{\infty}$, изъ котораго естьли возмется три члена, то сумма ихъ будетъ $= \frac{3}{4}$, больше $\frac{1}{12}$ частiю; а сумма 4 хъ членовъ $\frac{5}{8}$ будетъ $\frac{1}{24}$ ю частiю меньше $\frac{2}{3}$ и проч.

II. Ежели положимъ $a = \frac{1}{3}$, то предложенная дробь $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$, а безконечный рядъ, изображающiй оную, будетъ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729} - \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$, изъ котораго ежели возмется три члена, то сумма ихъ будетъ $= \frac{2}{3}$, меньше $\frac{1}{12}$ частiю; а сумма 4 членовъ $\frac{20}{27}$ будетъ $\frac{1}{108}$ частiю меньше $\frac{3}{4}$ и проч. Изъ сего видно, что при безконечномъ числѣ членовъ, помянутой въ обоихъ случаяхъ недостатокъ уничтожится.

III. Дробь $\frac{1}{1+a}$ можно еще представить безконечнымъ рядомъ и другимъ образомъ, когда 1 раздѣлится на $a+1$, какъ слѣдуетъ:

$$a+1)1 * * *(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} \text{ и проч.} - - - - \frac{1}{a^\infty}.$$

$$\underline{1 + \frac{1}{a}}$$

$-\frac{1}{a}$

$$-\frac{1}{a}$$
$$-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}$$
$$+\frac{1}{a^2}$$
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$$
$$-\frac{1}{a^3}$$
$$-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}$$
$$+\frac{1}{a^4}$$
$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$$
$$-\frac{1}{a^5}$$
$$-\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$$
$$+\frac{1}{a^6} \text{ и проч.} \ldots \frac{1}{a^\infty}$$

И такЪ предложенная дробь $\frac{1}{a+1}$ равна слѣдующему ряду: $\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}\ldots\frac{1}{a^\infty}$. Положимъ $a=1$, то будетъ сей рядъ $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1$ и проч. какъ и прежде. Естьлижъ положится $a=2$, то выйдетъ сей рядъ $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ и проч.

IV. Равнымъ образомъ можно и дробь $\frac{c}{a+b}$ вообще, обратить въ безконечный рядъ, какъ слѣдуетъ:

$$a+b)c***(\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4} \text{ и проч.}$$
$$c+\frac{bc}{a}$$
$$-\frac{bc}{a}$$
$$-\frac{bc}{a}-\frac{b^2c}{a^2}$$

+

$$+\frac{b^2c}{a^2}$$

$$\frac{b^2c}{a^2}+\frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3}-\frac{b^4c}{a^4}$$

$$+\frac{b^4c}{a^4} \text{ и проч.}$$

И такъ будетъ предложенная дробь $\frac{c}{a+b}$ равна слѣдующему ряду: $\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}$ и проч. безконечно. Положимъ $a=2$, $b=4$ и $c=3$, то будетъ предложенная дробь $\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12$ и проч. Пусть будетъ $a=10$, $b=1$ и $c=11$, то будетъ дробь $\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}+\frac{1}{100000}$ и проч. изъ коихъ ежели возмется 2 члена, то сумма ихъ $\frac{99}{100}$ будетъ $\frac{1}{100}$ ю меньше 1; естьлижъ возмется 3 члена, то сумма оныхъ $\frac{1001}{1000}$ будетъ $\frac{1}{1000}$ частiю больше предложенной дроби и проч.

V. Такимъ же образомъ чрезъ непрестанное дѣленiе обращается въ безконечной рядъ и такая дробь, у которой дѣлитель, то есть знаменатель, изъ многихъ частей состоять будетъ, *на примѣръ*: ежели бы предложена была слѣдующая дробь: $\frac{1}{1-a+a^2}$, то безконечной рядъ, равной сей предложенной дроби, сыскивается такимъ образомъ:

$$1-a+a^2)1 * * * *(1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ и проч.}$$

$$1-a+a^2$$

$$+a-a^2$$

$$a-a^2+a^3$$

$$-a^3$$

$$
\begin{array}{l}
-a^3 \\
\underline{-a^3+a^4-a^5} \\
\quad -a^4+a^5 \\
\quad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
\qquad\quad +a^6 \\
\qquad\quad \underline{+a^6-a^7+a^8} \\
\qquad\qquad +a^7-a^8 \\
\qquad\qquad \underline{a^7-a^8+a^9} \\
\qquad\qquad\quad -a^9 \text{ и проч.}
\end{array}
$$

И такЪ будетЪ предложенная дробь $\frac{1}{1-a+a^2} = 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}$ и проч. - - - - a^∞. ПоложимЪ, $a=1$, то будетЪ дробь $\frac{1}{1-a+a^2} = \frac{1}{1-1+1} = 1 = 1+1-1-1+1+1-1-1+1+1$ и проч, которой содержитЪ вЪ себѣ прежнїй рядЪ $1-1+1-1+1$ и проч. дважды (§ 51); но предписанной рядЪ былЪ $= \frac{1}{2}$, то и не удивительно, что сей $= 2 \times \frac{1}{2} = 1$. Пусть $a = \frac{1}{2}$, то будетЪ дробь $\frac{1}{1-a+a^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512}-\frac{1}{1024}$ и проч. БудежЪ положимЪ $a = \frac{1}{3}$, то будетЪ дробь $\frac{1}{1-a+a^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = 1 : \frac{7}{9} = \frac{9}{7} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\frac{1}{2187}$ и проч. изЪ коихЪ сумма 4 членовЪ $= \frac{104}{81}$, будетЪ $\frac{1}{567}$ю частїю меньше, нежели $\frac{9}{7}$; но естьли положимЪ еще $a = \frac{2}{3}$, то будетЪ дробь $\frac{1}{1-a+a^2} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}} = \frac{9}{7} = 1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729}+\frac{126}{2187}$ и проч. которой рядЪ прежнему равенЪ; слѣдовательно, ежели изЪ сего вычтется первой, то разность ихЪ будетЪ $= 0 = \frac{1}{3}-\frac{7}{27}-\frac{15}{81}+\frac{63}{728}+\frac{127}{2187}$, гдѣ 4 члена вмѣстѣ составляютЪ сумму $\frac{-2}{81}$.

Примѣч.

Примѣчан. Показаннымъ образомъ можно всѣ дроби обращать въ безконечные ряды, что не только часто приноситъ великую пользу, но и само по себѣ важно: поелику безконечной рядъ, не смотря на то, что никогда не пресѣчется, но еще и опредѣленное знаменованіе имѣть можетъ. Изъ сего основанія выведены важнѣйшія изобрѣтенія, чего ради сіе свойство дробей заслуживаетъ разсмотреніе съ большимъ вниманіемъ.

О различныхъ изображеніяхъ величинъ съ отрицательными показателями.

§ 53 Теоремы. Iя. *Величина* a^{-1} *будетъ* $= \frac{1}{a}$; ибо $\frac{a}{a^2} = a^{1-2} = a^{-1}$ (§ 26 и 27), также $\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$ (§ 35), по сему $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (Част. I. § 30). Также и $z^{-3} = \frac{1}{z^3}$; ибо $\frac{z}{z^4} = z^{-3}$, и $\frac{z}{z^4} = \frac{1}{z^3}$ (§ 35); слѣдовательно $z^{-3} = \frac{1}{z^3}$, и вообще $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

II я. величина $\frac{a^2}{b^{-1}}$ будетъ $= a^2b$; ибо $\frac{a^2}{b^{-1}} = a^2 : b^{-1}$; но $b^{-1} = \frac{1}{b}$; по сему $a^2 : b^{-1} = a^2 : \frac{1}{b} = a^2b$, слѣдовательно и $\frac{a^2}{b^{-1}} = a^2b$.

§ 54. *Слѣдст.* I е. Изъ сего видно, что всякую величину отрицательной степени можно изобразить положительною степенью, *на примѣръ*: $\frac{b^2c^{-3}}{a^{-2}}$ будетъ $= \frac{b^2a^2}{c^3}$; ибо $\frac{b^2c^{-3}}{a^{-2}} = b^2 \times \frac{1}{c^3} : \frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{c^3} : \frac{1}{a^2} = \frac{b^2a^2}{c^2}$ (§ 45); и вообще $\frac{b}{a^{-n}} = a^nb$.

Равнымъ образомъ и величина $\frac{a^2b^{-3}}{cn^{-2}}$ будетъ $= \frac{a^2n^2}{b^3c} = \frac{c^{-1}b^{-3}}{a^{-2}n^{-2}}$; ибо по предъидущему предложе-

нію $\frac{a^2x^{-3}}{cn^{-2}} = \frac{a^2n^2}{x^3c}$, также и $\frac{c^{-1}x^{-3}}{a^{-2}n^{-2}} = (\frac{1}{c} \times \frac{1}{x^3}):$ $(\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{cx^3} : \frac{1}{a^2n^2} = \frac{a^2n^2}{x^3c}$ (§ 45), слѣдовательно и $\frac{a^2x^{-3}}{cn^{-2}} = \frac{c^{-1}x^{-3}}{a^{-2}n^{-2}}$.

Слѣдств. 2. Изъ сего явствуетъ, что и обратно всякую величину положительной степени можно изобразить отрицательною степенью.

Примѣч. Изъ вышеписанныхъ предложеній ясно видно, что величины положительной степени, переставляются изъ числителя на мѣсто знаменателя, а изъ знаменателя на мѣсто числителя съ отрицательными показателями; и обратно величины отрицательной степени при переставкѣ такимъ же образомъ, превращаюпся въ положительную степень, какъ-то изъ последняго примѣра видно.

О Изображеніи степеней простыхъ и сложныхъ количествъ.

§ 55. *Опредѣлен.* Предъ симъ уже показано, что *первою степенью* называется всякое количество, само себя означающее, *на примѣръ*: первая степень количества a есть то же a; *вторая степень* величины a, или произведеніе a чрезъ a, есть $a \times a = a^1 \times a^1 = a^{1\times2} = a^2 = aa$; также вторая степень количества $a^3 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3\times2}$; третья степень количества $a = a \times a \times a =$

$a^1 \times a^1 \times a^1 = a^{1\times3} = a^3$. Четвертая степень количества $a = a \times a \times a \times a = a^{1\times4} = a^4$, и такъ далѣе. Во всѣхъ сихъ степеняхъ величина a именуется *корень* той степени, которую она производитъ, какъ-то: a есть корень второй степени отъ a^2, корень третей степени отъ a^3 и проч.

§ 56. *Слѣдств.* Изъ сего видно, 1) что степень количества a не что иное, какъ нѣсколько разъ повторенное того же количества самаго на себя умноженiе. 2.) Число таковыхъ умноженiй единицею меньше показателя степени. 3) При возвышенiи какого нибудь количества въ данную степень, показатель данной величины умножается показателемъ требуемой степени, *на примѣръ*: третья степень количества $a^2 = a^{2\times3} = a^6 = a^2 \times a^2 \times a^2$; по сей причинѣ для возвышенiя $a = a^1$ въ степень m, должно умножить только показателя 1 количества a показателемъ степени m, будетъ требуемая степень $a^{1\cdot m} = a^m$, (такая степень именуется *неопредѣленною*); также для возвышенiя количества a^n въ степень r, умножь показателя n чрезъ r, будешь имѣть желанную степень a^{nr} и проч.

§. 57. *Опредѣл.* Вторая степень какой нибудь величины именуется *квадратъ*; а третья степень называется *кубъ*, *на примѣръ*: a^2 есть квадратъ количества a; a^3 есть кубъ того же количества a. Дабы найти квадратъ какого нибудь числа, то должно умножить оное самимъ собою одинъ разъ, *на примѣръ*: квадратъ

числа

числа 5 будетЪ $= 5 \times 5 = 25$; а когда сей квадратЪ 25 умножится еще одинЪ разЪ чрезЪ свой корень 5, то произведеніе $25 \times 5 = 125$ будетЪ кубЪ числа 5.

И такЪ квадраты и кубы простыхЪ чиселЪ отЪ единицы до десяти будутЪ слѣдующіе:

Числа.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
квадрат.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
кубы.	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

§ 58. Дабы изобразить различныя степени данныхЪ дробей, то вторая степень дроби $\frac{a}{b}$ найдется, когда числитель и знаменатель возвышены будутЪ во вторую степень, то есть $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$; третья степень дроби $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$; также третья степень дроби $\frac{2b^2}{3c}$ будетЪ $(\frac{2b^2}{3c})^3$

$= \frac{2 \times 2 \times 2 b^{2 \times 3}}{3 \times 3 \times 3 c^{1 \times 3}} = \frac{8b^6}{27c^3}$.

Четвертая степень дроби $\frac{5}{7}$ будетЪ $(\frac{5}{7})^4 = \frac{5.5.5.5}{7.7.7.7} = \frac{625}{2401}$. Пятая степень дроби $\frac{a^2bc^3}{d^2}$ будетЪ $= (\frac{a^2bc^3}{d^2})^5 = \frac{a^{2 \times 5}b^{1 \times 5}c^{3 \times 5}}{d^{2 \times 5}} = \frac{a^{10}b^5c^{15}}{d^{10}}$. Степень $\frac{1}{2}n$, количества $\frac{b^3}{a^2}$, будетЪ $= \frac{b^{\frac{3n}{2}}}{a^n}$ и проч.

§ 59. *Задача*. Сложную положительную величину $a+b$ возвысить во вторую, третью и далѣе степень.

Рѣшен. Сложное количество возвышается въ какую нибудь степень, также какъ и простое, чрезъ умноженіе столько разъ самаго на себя, сколь великъ показатель степени безъ единицы; и такъ, дабы найти вторую степень величины $a+b$, то умножь $a+b$ чрезъ $a+b$, получишь вторую степень величины $a+b$, которая обыкновенно означается чрезъ $\overline{a+b}^2$ или $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Третья степень или кубъ величины $a+b$ будетъ $= \overline{a+b}^3$ или $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Четвертая степень количества $a+b$ будетъ $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пятая степень величины $a+b = (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, и проч.

Примѣч. I Изъ сего удобно можно видѣть, что число членовъ каждой степени величины $a+b$ единицею больше показателя той же степени; предстоящее втораго члена равно показателю перваго члена; показатель той же величины во второмъ членѣ единицею меньше показателя перваго члена; а въ третьемъ членѣ показатель той же величины единицею меньше показателя втораго члена, и такъ далѣе. Показатель же послѣдняго члена второй величины

ны b равенъ показателю степени, а показатели той же величины прочихъ членовъ, къ лѣвой рукѣ одинъ послѣ другаго слѣдующихъ, единицею уменьшаются.

Примѣч. 2. Изъ тогожъ видно, ежели показатели второй величины b поставятся подъ показателями перваго количества a, и чрезъ то составятся дроби, *на примѣръ*: показатели изъ пятой степени $\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$, то первая дробь $\frac{5}{1}$ будетъ предстоящее втораго члена; произведенie двухъ дробей $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} = 10$ предстоящее третьяго члена; произведенie трехъ дробей $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$, предстоящее четвертаго члена, $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 5$ предстоящее 5 го члена, и наконецъ $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5} = 1$ будетъ предстоящее послѣдняго члена.

§ 60. *Задача.* Величину $a + b$ или $a - b$ (*) возвысить въ седьмую степень.

Рѣшен. Поелику число членовъ требуемой степени должно быть единицею больше показателя степени, то есть 8 (§ 59. Прим. 1.), по сей причинѣ, написавши помянутые данные члены съ ихъ показателями одинъ подъ другаго слѣдующимъ образомъ: умножь противустоящіе

$$a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$$
$$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7$$

члены между собою, будетъ

$$a^7, a^6 b, a^5 b^2, a^4 b^3, a^3 b^4, a^2 b^5, a b^6, b^7 = (a + b)^7$$ безъ

пред-

*) Два такія количества для краткости вообще означаются иногда такъ: $a \pm b$, при чемъ и выговаривается: величина a плюсъ b или минусъ b, то есть a съ b или a безъ b.

предстоящихъ; а чтобъ найти предстоящее всякаго члена, то поставя показателей второй величины b подъ показателями первой a, то есть $\frac{7}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}$, будетъ $\frac{7}{1} = 7$ предстоящее втораго члена, $\frac{7}{1} \times \frac{6}{2} = 21$ предстоящее третьяго члена, $21 \times \frac{5}{3} = 35$ предстоящее четвертаго члена, $35 \times \frac{4}{4} = 35$ предстоящее пятаго члена, $35 \times \frac{3}{5} = 21$ предстоящее шестаго члена, $21 \times \frac{2}{6} = 7$ предстоящее седьмаго члена, $7 \times \frac{1}{7} = 1$ предстоящее послѣдняго члена; потомъ каждое изъ сихъ предстоящее приписавши къ прежде найденнымъ членамъ, получишь требуемую степень величины $a \pm b = (a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$.

§ 61. *Задача.* Величину $a - b$ возвысить въ восьмую степень.

Рѣшен. Разположа данные члены сего количества и сыскавши къ нимъ предстоящихъ, какъ въ предъидущей задачѣ показано, поставь предъ вторымъ, четвертымъ, шестымъ и восьмымъ членомъ знакъ —, получишь требуемую степень величины $a - b = (a - b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

Примѣч. Изъ двухъ предъидущихъ задачь удобно можно видѣть, что въ степеняхъ чотнаго числа, какъ *на примѣръ*, восьмой степени, самое большее предстоящее количество 70 будетъ у средняго члена, а прочiе отъ него къ правой рукѣ уменьшаются въ такомъ же порядкѣ какъ и къ лѣвой. Въ степеняхъ же не чотнаго числа, *на примѣръ* 7 й степени, самыя большiя и равныя предстоящiя будутъ у двухъ среднихъ, а прочiя отъ нихъ къ правой рукѣ уменьшаются въ такомъ же порядкѣ, какъ и къ лѣвой. По сей причинѣ, при возвышенiи въ какую нибудь степень двучастнаго количества, надлежитъ находить предстоящiя только до средняго члена, а къ про-

чимъ величинамъ, къ правой рукѣ слѣдующимъ, приписать оныя въ такомъ же порядкѣ, въ какомъ они находятся къ лѣвой рукѣ.

§ 62. *Задача.* Величину $a + b$ возвысить въ неопредѣленную степень.

Рѣшен. Напиши рядъ изъ перваго члена a, въ которомъ бы первой членъ былъ a^n, а прочіе члены поставь съ показателями, одинъ другаго единицею уменьшенными, гдѣ послѣдній членъ будетъ не имѣющій степени возвышенія $= a^{n-n} = a^0 = 1$ (§ 59. *Примѣч. I.* и § 27.); подъ симъ рядомъ, начиная единицею, напиши другой рядъ количества b съ показателями, одинъ другаго единицею превышающими; потомъ умножь ихъ между собою, какъ слѣдуетъ:

$$\frac{a^n,\ a^{n-1},\ a^{n-2},\ a^{n-3},\ a^{n-4},\ a^{n-5}\ \ldots\ a^{n-n} = a^0 = 1}{1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5\ \ldots\ldots\ b^n}$$

$$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, a^{n-4}b^4, a^{n-5}b^5\ \ldots\ a^0b^n = b^n$$

$=$ суммѣ всѣхъ членовъ безъ предстоящихъ; но дабы къ сему ряду членовъ найти предстоящихъ, то принявъ показателей буквы a за числителей, а показателей буквы b за знаменателей, изобрази оные дробью, какъ въ (§ 60) показано, то есть $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{n-3}{4}$, $\frac{n-4}{5}$ и проч. изъ коихъ будетъ $\frac{n}{1}$ предстоящее втораго члена, $\frac{n}{1} \times (\frac{n-1}{2})$ предстоящее третьяго члена, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ предстоящее четвертаго члена, $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4}$ предстоящее 5 го члена и прочая безконечно, най-

дется неопредѣленная степень величины $a+b$ $=(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}.b + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2})a^{n-2}.b^2$ $+ \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3})a^{n-3}.b^3 + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3}).$ $(\frac{n-3}{4})a^{n-4}.b^4$ и проч. безконечно, гдѣ послѣднiй членъ будетъ $a^0 b^n = b^n$.

Доказат. Дабы увѣриться, что въ сей степени послѣднiй членъ будетъ $= b^n$, положимъ $n=5$, то будетъ послѣднiй членъ $= a^{n-5}b^n$ $= b^n = \frac{n}{1}(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3}).(\frac{n-3}{4}).(\frac{n-4}{5})a^{n-5}b^n = \frac{5}{1}.(\frac{5-1}{2}).$ $(\frac{5-2}{3}).(\frac{5-3}{4}).(\frac{5-4}{5})a^{5-5}.b^n = \frac{5}{1}.\frac{4}{2}.\frac{3}{3}.\frac{2}{4}.\frac{1}{5}a^0 b^n = 1.a^0 b^n = b^n$.

§ 63. **Прибавлен.** Сiю неокончаемую степень величины $a+b$ можно, не перемѣняя ея величины, представить въ другомъ видѣ; ибо извѣстно, что $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3}$ и проч. (§ 27); того ради, поставя каждое изъ сихъ предложенныхъ величинъ на мѣсто равныхъ количествъ, будетъ помянутая степень величины $a+b = (a+b)^n$ $= a^n + \frac{n}{1}.\frac{a^n b}{a} + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2})\frac{a^n b^2}{a^2} + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3}).$ $\frac{a^n b^3}{a^3} + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3}).(\frac{n-3}{4}).\frac{a^n b^4}{a^4} + \ldots . b^n =$

$$a^n\left(1 + \frac{n}{1}\frac{b}{a} + \frac{n}{1}(\frac{n-1}{2})\frac{b^2}{a^2} + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3}).\frac{b^3}{a^3} + \frac{n}{1}.(\frac{n-1}{2}).(\frac{n-2}{3}).(\frac{n-3}{4})\frac{b^4}{a^4}. + \text{и проч} \; - - - \right)$$

§ 64.

§ 64. *Слѣдств.* Изъ сего видно, что сыскавши предстоящія какой нибудь степени, (изъ коихъ предстоящее перваго члена всегда будетъ 1) надлежитъ умножить второе предстоящее и всѣ послѣдующія по немъ первою степенью величины $\frac{b}{a}$; потомъ третій членъ и послѣдующіе по немъ чрезъ ту же первую степень $\frac{b}{a}$; подобнымъ образомъ, начиная съ четвертаго даже до послѣдняго, умножь всѣ члены тою же величиною $\frac{b}{a}$ и такъ далѣе; а наконецъ всѣ оные члены умножь высшею степенью a^n, чрезъ что найдется требуемая степень n всякой двучастной величины, *на примѣръ*: степень n величины a^3+b^2 легко сыскаться можетъ, естьли только найденныя предстоящія, вмѣсто $\frac{b}{a}$ умножатся показаннымъ образомъ чрезъ $\frac{b^2}{a^3}$, а напослѣдокъ всѣ члены умножатся чрезъ a^{3n}, какъ слѣдуетъ

$$a^{3n}\times\left(1+\frac{n}{1}.\frac{b^2}{a^3}+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{b^4}{a^6}+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{b^6}{a^8}+\ldots\right)$$

§ 65. *Слѣдствіе II.* Посредствомъ сего общаго степеней двучастнаго количества изображенія, легко можно всякое количество возвысить въ желаемую степень, *на примѣръ*: положимъ, что требуется третья степень величины $x+a^2$, то найдя предстоящія, какъ въ § 59, Примѣч. 2 мъ показано, кои будутъ

$1, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ умножь, какъ въ предъидущемъ следствiи предписано, чрезъ $\frac{a^2}{x}$, будетъ $(x + a^2)^3$

$$=x^3\left(1+\frac{3a^2}{x}+\frac{3a^4}{x^2}+\frac{a^6}{x^3}\right)=x^3+3x^2a^2+3xa^4+a^6$$

(§ 41. слѣд.) Тожъ должно разумѣть и о прочихъ степеняхъ двучастнаго количества.

§ 66. *Задача.* Трехчастное количество $c+d+h$ возвысить во вторую степень.

Рѣшен. Сперва по предложенному въ § 59 мъ изображенiю $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$; положа $a=c$, $b=d$, найди вторую степень величины $c+d$, которая будетъ $= c^2 + 2cd + d^2$; потомъ положи $a = c+d$, и $b=h$: при чемъ, разсматривая изображенiе $a^2+2ab+b^2$, должно бы найти вторую степень количества $c+d=a$, которая уже $= c^2+2cd+d^2$; и такъ осталось только $c+d=a$ удвоить, а потомъ, умножа чрезъ $h=b$, сложить со второю степенью величины $h=b$, отъ чего будетъ $2ab+b^2 = 2(c+d)h+h^2$. Сiе найденное количество придай ко второй степени величины $c+d$, коихъ сумма $c^2+2cd+d^2+2(c+d)h+h^2 = c^2+2cd+d^2+2ch+2dh+h^2 = (c+d+h)^2$, будетъ требуемая степень данной величины.

§ 67. *Задача.* Данное количество $c+d+e+h$ возвысить во вторую степень.

Рѣшен. Положимъ $c=a$ и $d=b$, то сообразуясь съ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, будетъ вторая степень количества $c+d = c^2+2cd+d^2 = (c+d)^2$; потомъ положа $c+d=a$ и $e=b$, по предъ-

предъидущей задачѣ, найдется вторая степень количества $c+d+e=c^2+2cd+d^2+2(c+d).e+e^2$, а наконецъ положа $a=c+d+e$ и $b=h$, должно бы, смотря на предписанное изображенie, найти вторую степень количества $c+d+e$, но какъ уже вторая степень сего количества сыскана, то слѣдуетъ только $c+d+e=a$ удвоить, и умноживъ чрезъ h, сложить со второю степенью количества h, отъ чего будетъ $2ab+b^2=2(c+d+e)h+h^2$. Сie количество придай ко второй степени величины $c+d+e$, коихъ сумма $c^2+2cd+d^2+2(c+d)e+e^2+2(c+d+e)h+h^2=c^2+2cd+d^2+2ce+2de+e^2+2ch+2dh+2eh+h^2=(c+d+e+h)^2$ будетъ искомая степень данной величины.

Примѣч. I. Изъ двухъ предъидущихъ задачь явствуетъ, что квадратъ многочастной величины состоитъ вопервыхъ, изъ квадратовъ каждой части, и изъ удвоенныхъ произведенiй каждыхъ двухъ частей между собою.

Примѣч. II. Когда нѣкоторые члены даннаго количества будутъ отрицательные, то по сему же правилу найдется его вторая степень, естьли только къ двойнымъ произведенiямъ припишутся знаки, какой каждому принадлежать будетъ, *на примѣръ:* квадратъ или вторая степень величины $a-b-c$, будетъ $=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

Примѣч. III. Посредствомъ предписанныхъ правилъ, всякая сложная величина во вторую степень возвышена быть можетъ.

§ 68. *Задача.* изъ числа 2374 посредствомъ предъидущихъ предложенiй составить вторую степень.

Рѣшен. Поелику число 2374 состоитъ изъ четырехъ знаковъ, то представя его четы-

тырехъ-частнымъ количествомъ, положи, $2000 = a$, $300 = b$, $70 = c$, $4 = d$, будетъ $2000 + 300 + 70 + 4 = a + b + c + d = 2374$; потомъ сыщи вторую степень количества $a + b + c + d$, которая будетъ $= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = (a + b + c + d)^2$ (§ 67.); но дабы по сему предложенному образцу, представить квадратъ данной величины числами, то взявши первую часть 2 (изключая нули) вмѣсто a, умножь квадратно,

$a^2 =$	4	--	--	--
$2ab =$	1	2	--	--
$b^2 =$	-	9	--	--
$2(a+b)c =$		32	2	--
c^2 -		--	49	
$2(a+b+c)d =$		1	89	6
$d^2 =$		--	--	16
$(a+b+c+d)^2 =$	5	63	58	76

будетъ $a^2 = 4$; сіе число напиши на своемъ мѣстѣ, какъ слѣдуетъ; потомъ дважды взятую первую часть 2, то есть $2 \times 2 = 4 = 2a$ умножь второю частью $3 = b$, произведеніе $12 = 2ab$ напиши подъ числомъ 4, однимъ знакомъ въ передъ (поелику каждая единица сего произведенія вдесятеро меньше каждой единицы числа 4 (*Часть I* § 169); и для того второй знакъ 2 долженъ занять въ произходимомъ числѣ второе мѣсто), квадратъ же второй части $9 = b^2$, напиши такъ, чтобы оной стоялъ на третьемъ мѣстѣ произходимаго числа; потомъ возьми вмѣсто $a + b = 2000 + 300 = 2300 = 23$ (изключая нули) и удвоивши оное, умножь произведеніе $46 = 2(a + b)$ третіею частію $7 = c$, произведеніе $322 = 2(a + b)c$ напиши также однимъ знакомъ въ передъ, подъ коимъ напиши такимъ

же

же образомъ и квадратъ третьей части $49 = c^2$; наконецъ, взявши первые три знака 237 вмѣсто $a + b + c$ и удвоивъ оное, произведенiе $474 = 2(a + b + c)$ умножь чрезъ послѣднюю часть $4 = d$, произведенiе $1896 = 2(a + b + c)d$ напиши подъ числомъ 49 однимъ знакомъ въ передъ; такимъ же порядкомъ поставь и квадратъ послѣдней части $16 = d^2$; чрезъ что изобразится квадратъ числа $2374 = 5635876$.

§ 69. *Слѣдст.* I. Изъ сего удобно можно видѣть, ежели квадратъ какого нибудь числа раздѣлится отъ правой руки къ лѣвой на классы, считая въ каждой по два знака, не смотря на то, что въ послѣднемъ классѣ отъ лѣвой руки останется иногда одинъ знакъ, то въ немъ столько будетъ классовъ, сколько въ корнѣ его знаковъ; ибо самое меньшее число, состоящее изъ двухъ знаковъ, есть 10, которого квадратъ 100 состоитъ изъ трехъ знаковъ, а самое большее число изъ двухъ знаковъ состоящее, есть 99, коего квадратъ 9801 состоитъ изъ четырехъ знаковъ; по сей причинѣ квадраты отъ чиселъ, между 10 и 100 заключающихся, изъ коихъ каждое состоитъ изъ двухъ знаковъ, меньше трехъ, и больше четырехъ знаковъ имѣть не могутъ; слѣдовательно каждой изъ сихъ квадратовъ содержитъ въ себѣ столько классовъ, сколько въ корнѣ его знаковъ. Такимъ же образомъ докажется, что квадраты отъ чиселъ, между 100 и 1000 заключающихся, имѣютъ столько классовъ, сколько въ корняхъ ихъ знаковъ и такъ далѣе. какъ здѣсь квадратъ

5,

5,63, 58, 76 числа 2374, заключаетъ въ себѣ столько классовъ, сколько корень его имѣетъ знаковъ

Слѣдст. II. Изъ тогожъ явствуетъ, что квадратъ первой части 2 заключается въ послѣднемъ знакѣ 5 перваго класса отъ лѣвой руки; произведеніе первой части 2 на вторую 3 дважды взятое оканчивается въ первомъ знакѣ втораго класса; квадратъ же второй части 3 находится въ послѣднемъ знакѣ того же класса. Произведеніе двухъ первыхъ частей 23 на третью 7, дважды взятое, оканчивается въ первомъ знакѣ третьяго класса; а послѣдній знакъ квадрата третьей части 7 заключается въ послѣднемъ знакѣ тогожъ класса. И наконецъ послѣдній знакъ произведенія трехъ первыхъ частей 237 на послѣднюю 4, дважды взятаго, находится въ первомъ знакѣ послѣдняго класса, а квадратъ сей части оканчивается въ послѣднемъ знакѣ того же класса.

§ 70. *Задача.* Величину $c+d+e$, состоящую изъ трехъ частей, возвысить въ третью степень.

Рѣшен. Сперва по предложенному въ § 59 мъ изображенію $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, взявши вмѣсто $a=c$ и $b=d$, возвысь величину $c+d$ въ третью степень, которая будетъ $= c^3+3c^2d+3cd^2+d^3 = (c+d)^3$; потомъ положа $a=c+d$ и $b=e$, должно бы, смотря на предложенной образецъ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ найти третью степень количества $c+d=a$; но

по какъ оная степень уже найдена, того ради умножь вторую степень количества $c+d$ чрезъ 3 и чрезъ e, будетъ $3a^2b = 3(c+d)^2.e$; потомъ онуюжъ величину $c+d=a$, трижды взятую, умножь второю степенью величины e, будетъ $3ab^2 = 3(c+d).e^2$; напослѣдокъ сіи произведенія сложа съ третьею степенью величины $e=b$, которая $=e^3$, то есть $3(c+d)^2.e+3(c+d).e^2+e^3$, придай къ третьей степени количества $c+d$, коихъ сумма $c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+3(c+d)^2.e+3(c+d).e^2+e^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+3c^2e+6cde+3d^2e+3ce^2+3de^2+e^3=(c+d+e)^3$ будетъ требуемая степень данной величины.

§ 71. *Задача.* Даннаго количества $c+d+e+h$ найти третью степень.

Рѣшен. Сперва по предъидущей задачѣ сыщи третью степень количества $c+d+e$, которая будетъ $= c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+3(c+d)^2e+3(c+d).e^2+e^3$; потомъ положа $c+d+e=a$ и $h=b$, должно бы, смотря на предписанной въ § 59 мъ образецъ, найти третью степень количества $c+d+e$; но какъ уже оная степень найдена, то сообразуясь со вторымъ членомъ помянутаго образца, представь количество $c+d+e=a$ второю степенью, которое умножа чрезъ 3 и чрезъ $h=b$, будетъ $3a^2b = 3(c+d+e)^2h = 3c^2h+6cdh+3d^2h+6edh+6ceh+3e^2h$; потомъ, сравнивая третій членъ образца $3ab^2$ со взятыми вмѣсто ихъ равными количествами, умножь трижды взятую величину $c+d+e=a$ второю степенью количества $h=b$, получишь $3ab^2 = 3(c+d+e)h^2 =$

$3ch^2$

$3ch^2 + 3dh^2 + 3eh^2$; наконецъ сумму сихъ двухъ найденныхъ произведенiй, сложа съ третьею степенью величины $h = b$, которая $= h^3$, то есть $3(c + d + e)^2 h + 3(c + d + e) h^2 + h^3$, придай къ третьей степени величины $c + d + e$, коихъ сумма $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3(c + d)^2 e + 3(c + d)e^2 + e^3 + 3(c + d + e)^2 h + 3(c + d + e)h^2 + h^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2h + 6cdh + 3d^2h + 6edh + 6ceh + 3e^2h + 3ch^2 + 3dh^2 + 3eh^2 + h^3 = (c + d + e + h)^3$ будетъ искомая степень даннаго количества.

§ 72. *Задача.* Даннаго числа 2346, посредствомъ предъидущихъ Задачь, найти третью степень.

Рѣшен. Поелику число 2346 имѣетъ въ себѣ 4 знака, того ради представь оное четырехчастнымъ, то есть положи $2000 = a$, $300 = b$, $40 = c$, $6 = d$, будетъ $2000 + 300 + 40 + 6 = a + b + c + d = 2346$; потомъ по предъидущей задачѣ сыщи третью степень количества $a + b + c + d$, которая будетъ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c).d^2 + d^3$; но дабы каждой членъ сей степени изобразить числами, то взявши первую часть 2 (изключая нули) вмѣсто a, сыщи третью степень оной, будетъ $a^3 = 8$, которое напиши на своемъ мѣстѣ, какъ слѣдуетъ; потомъ трижды взятую вторую степень первой части 2, то есть $3.2.2 = 12$, умножь вторую частiю $3 = b$, произведенiе $36 = 3a^2b$ напиши подъ числомъ 8 однимъ знакомъ въ передъ (поелику

елику каждая единица сего произведенія вдеся-

$a^3=$	8			
$3a^2b=$	3	6		
$3ab^2=$		54		
$b^3=$		27		
$3(a+b)^2.c=$		634	8	
$3(a+b)c^2=$		11	04	
$c^3=$			64	
$3(a+b+c)^2.d=$		98	560	8
$3(a+b+c)d^2=$			252	72
$d^3=$				216
$(2346)^3=$	12	911	717	736

теро меньше каждой единицы числа 8 (*Часть I* § 169); и для того второй знакъ долженъ занять въ происходимомъ числѣ второе мѣсто); потомъ трижды взятую первую часть умножь квадратомъ второй части, произведеніе $3.2.9 = 54 = 3ab^2$ поставь подъ числомъ 36, такъ чтобы послѣдній знакъ занималъ третье мѣсто въ происходимомъ числѣ; кубъ же второй части $27 = b^3$ напиши подъ числомъ 54, также однимъ знакомъ впередъ; потомъ возьми 23 вмѣсто $a + b = 2000 + 300$ и $c = 4$ (изключая нули) и умножь квадратъ двухъ первыхъ частей 23, трижды взятой, третіею частію 4, произведеніе $6348 = 3(a+b)^2.c$ напиши подъ числомъ 27 такимъ же порядкомъ, какъ и прежде; послѣ сего двѣ первыя части, трижды взятыя, умножь квадратомъ третьей части $4 = c$, произведеніе $1104 = 3(a+b)c^2$, поставь подъ числомъ 6348, какъ и прежде, подъ коимъ напиши такимъ же образомъ и кубъ третьей части $64 = c^3$, и такъ далѣе изображая всѣ члены числами, наконецъ сложи оные вмѣстѣ, коихъ сумма будетъ третья степень числа 2346.

§ 73. *Слѣдств.* Изъ сего явствуетъ, ежели кубическое число раздѣлится отъ правой руки къ лѣвой на классы, считая въ каждой по три знака (почитая за классъ оставшейся иногда въ послѣднемъ классѣ отъ лѣвой руки одинъ или два знака); то въ немъ столько будетъ классовъ, сколько въ корнѣ его находится знаковъ: ибо самое меньшее число состоящее изъ двухъ знаковъ, есть 10, котораго кубъ 1000 состоитъ изъ 4хъ знаковъ; а самое большее число изъ двухъ знаковъ состоящее, есть 99, коего третья степень 970,299 состоитъ изъ шести знаковъ; по сему кубы отъ чиселъ между 10 и 100 содержащихся, изъ коихъ каждое имѣетъ по два знака, меньше четырехъ и больше шести знаковъ имѣть не могутъ; слѣдовательно каждой изъ сихъ кубовъ заключаетъ въ себѣ столько классовъ, сколько въ корнѣ его знаковъ. Такимъ же образомъ докажется, что кубы отъ чиселъ, между 100 и 1000 заключающихся, имѣютъ столько классовъ, сколько въ корняхъ ихъ знаковъ.

Слѣдств. II. Изъ тогожъ легко усмотрѣть можно, что кубъ 8 первой части 2, заключается въ послѣднемъ знакѣ перваго класа отъ лѣвой руки; послѣднїй знакъ произведенїя квадрата первой части 2 на вторую 3, трижды взятаго, находится въ первомъ знакѣ втораго класса; а послѣднїй знакъ произведенїя первой части 2 на квадратъ второй части трижды взятаго, оканчивается во второмъ знакѣ; кубъ же второй части заключается въ послѣднемъ знакѣ того же класса. Произведенїе квадрата двухъ первыхъ частей 23 на третью 4 трижды взятое, оканчивается въ первомъ знакѣ третьяго класса; послѣднїй же знакъ произведенїя двухъ первыхъ частей 23 на вторую степень третьей части трижды взятаго, заключается во второмъ знакѣ, а кубъ третьей части 4 находится въ послѣднемъ знакѣ того же класа; и такъ далѣе.

§ 74. *Прибавлен.* Такимъ же порядкомъ по предложеннымъ изображенїямъ въ (§ 66 и 70) находятся другїя высшїя степени всякаго сложнаго Алгебраическаго количества, *на примѣръ*: количество $3x^2 - \frac{1}{2}c^2$ возвысить въ 4 ю степень. Поелику образецъ четвертой степени есть слѣдующїй:

дующій: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (§ 59); того ради положи $a = 3x^2$, $b = -\frac{1}{2}c^3$, и такъ найдется $a^4 = 81x^8$, $4a^3b = -4.27x^6.\frac{1}{2}c^3 = -54x^6c^3$, $6a^2b^2 = 6.9x^4.\frac{1}{4}c^6 = \frac{27}{2}x^4c^6$, $4ab^3 = -4.3x^2.\frac{1}{8}c^9 = -\frac{3}{2}x^2c^9$, и $b^4 = \frac{c^{12}}{16}$; посему искомая степень $(3x^2 - \frac{1}{2}c^3)^4 = 81x^8 - 54x^6c^3 + \frac{27}{2}x^4c^6 - \frac{3}{2}x^2c^9 + \frac{c^{12}}{16}$.

О нахожденіи или извлеченіи корней изъ простыхъ и сложныхъ количествъ.

§ 75. *Опредѣл.* Количество a, умножающееся одинъ разъ самимъ собою для a^2, называется *корень второй степени* или *корень квадратной* отъ a^2; также bc есть корень квадратной отъ b^2c^2. Количество a^2, умножающееся два раза самимъ собою, есть *корень куба* отъ a^6. Количество x, умножающееся три раза самимъ собою, есть корень четвертой степени отъ x^4. И вообще корень степени n, отъ количества a^n есть a; потому что для сысканія степени a^n величина a умножается сама собою $n-1$ разъ.

§ 76. *Слѣдст.* Изъ сего удобно можно видѣть, что при сыскиваніи корней какой нибудь степени, показатель данной величины дѣлится на кореннаго показателя, *на примѣръ*: корень второй степени отъ $a^2 = a^{\frac{2}{2}} = a$; корень тойже степени отъ $a^6 = a^{\frac{6}{2}} = a^3$; ибо $a^3 \times a^3 = a^6$;

корень куба или третьей степени отъ $a^6 = a^{\frac{6}{3}} = a^2$; корень четвертой степени изъ $a^4 = a^{\frac{4}{4}} = a$ и проч. И вообще для сысканія корня степени n изъ a^{mn}, должно раздѣлить показателя mn на кореннаго показателя n; будетъ требуемой корень $a^{\frac{nm}{n}} = a^m$.

§ 77. *Положен.* Коренной знакъ употребляется слѣдующій $\sqrt{}$, *на примѣръ*: корень второй степени или квадратной изъ a^2 пишется такъ: $\sqrt{a^2}$ или $\sqrt[2]{a^2} = a$. Корень куба ~~или~~ третій степени изъ a^6, изображается чрезъ $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. И вообще корень степени n изъ a^{mn} пишется такимъ образомъ: $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

§ 78. *Опредѣл.* Количество, принадлежащее коренному знаку, называется *радикальною* или *коренною величиною*, *на примѣръ*: $p\sqrt[3]{b^3c^6}$, также $\sqrt[2]{a^4}$, или $\sqrt[4]{a^4}$ суть количества коренныя. Количество p, по лѣвую сторону кореннаго знака находящееся, называется *предстоящимъ коренной величины* $\sqrt[3]{b^3c^6}$; а количество b^3c^6, съ правой стороны знака стоящее, зовется *величина подъ знакомъ*. *Показателемъ кореннаго знака* или *показателемъ корня* называется число, показывающее, какой степени корень найти должно, *на примѣръ*: у величины $\sqrt[2]{b^4}$ или $\sqrt{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$, показатель корня есть 2;

у

у величины $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$, показатель коренного знака есть 3; и вообще у величины $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, показатель корня есть n.

Примѣч. Ежели какая нибудь коренная величина, *на примѣръ*: $\sqrt{b^2c^4}$ предстоящаго не имѣетъ, то предстоящимъ сей величины разумѣется 1 ца, какъ-то $\sqrt{b^2c^4} = 1.\sqrt{b^2c^4}$.

§ 79. *Опредѣл.* Коренная величина, изъ которой точнаго корня найти не можно, называется *неизвлекомая* или *глухая*, *на примѣръ*: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$ и проч. также $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a^2}$ и проч. суть величины неизвлекомыя или глухія.

§ 80. *Прибавлен.* Хотя изъ числа 7, также и изъ b, подлиннаго квадратнаго корня сыскать не можно; однакожъ мы имѣемъ ясное понятіе, естьли квадратной корень изъ 7, то есть $\sqrt[2]{7}$, самимъ собою помножится, то въ произведеніи $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$ безъ сомнѣнія произойдетъ 7; также $\sqrt{b} \times \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = b$.

§ 81. *Слѣд.* I. Когда показатель всякаго корня есть дѣлитель показателя величины, подъ знакомъ находящейся: то посредствомъ сего правила легко можно либо найти, или по крайней мѣрѣ изобразить требуемой корень всякой величины безъ кореннаго знака, какъ изъ слѣдующихъ

 при-

примѣровъ видно: $\sqrt[2]{a^6}=a^{\frac{6}{2}}=a^3$.
$\sqrt[2]{a^3b^2}=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}}=a^{\frac{3}{2}}b$. $\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$.
$\sqrt[\frac{2}{3}]{a}=a^{1:\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{a^3}$. $a^2\sqrt[2]{b}=a^2b^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt[s]{a^{\frac{n}{m}}}$
$=a^{\frac{n}{ms}}=\sqrt[ms]{a^n}$.

§ 82. *Слѣд.* Когда при возвышеніи дроби въ какую нибудь степень, числитель и знаменатель возвышается въ требуемую степень (§ 58), *на примѣръ*: вторая степень дроби $\frac{a}{n}=\frac{a^2}{n^2}$; третья степень дроби $\frac{a}{n}=\frac{a^3}{n^3}$ и проч. то изъ сего слѣдуетъ, что для сысканія требуемаго корня данной дроби должно извлечь оной какъ изъ числителя, такъ и изъ знаменателя дроби, *на примѣръ*: квадратной корень дроби $\frac{a^2}{n^2}=\sqrt{\frac{a^2}{n^2}}=\frac{a}{n}$. Корень куба изъ дроби $\frac{a^3}{n^3}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{n^3}}=\frac{a}{n}$. Тожъ должно разумѣть и о слѣдующихъ примѣрахъ:

$$\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.\quad \sqrt{\frac{16a^2}{c}}=\frac{4a}{\sqrt{c}}.$$

$$\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}.\quad \sqrt[3]{\frac{a^3e^2}{c^4}}=\frac{ae^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}=\frac{a\sqrt[3]{e^2}}{\sqrt[3]{c^4}}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^4n^5c}{a^2}}=\frac{an^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}}=\frac{a\sqrt[4]{n^5c}}{\sqrt{a}}.\quad \sqrt[3]{\frac{8a^3}{27n^6}}=\frac{2a}{3n^2}.$$

§ 83. *Примѣчан.* Изъ вышеписанныхъ предложеній видно, что всякая величина съ деннымъ знакомъ можетъ изобразиться и безъ онаго, такъ что показатель оной будетъ или цѣлое число, либо дробь, у которой чи-

числитель есть показатель данной величины, подъ знакомъ находящейся, а знаменатель есть показатель корня, *на примѣръ*: $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$ и проч. и обратно, всякая величина, имѣющая показателя дробь, можетъ быть изображена съ коренным показателемъ, *на примѣръ*: $a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$; также $b^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{b^3}$; и вообще $b^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{b^n}$ и проч.

§ 84. *Прибавлен.* Ежели потребно будетъ, чтобы по извлеченіи искомаго корня, одинъ только числитель былъ съ коренным знакомъ: то прежде умножъ числителя и знаменателя предложенной дроби знаменателемъ, возвышеннымъ въ степень кореннаго показателя единицею уменьшеннаго; потомъ извлеки требуемой корень, получишь такую дробь, у которой одинъ только числитель будетъ неизвлекомой, *на примѣръ*: $\sqrt[2]{\frac{a}{n}}$ по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ n будетъ $= \sqrt[2]{\frac{an}{n^2}} = \frac{\sqrt[2]{an}}{n}$; также $\sqrt[3]{\frac{nc^2}{a}}$ по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ a^2 будетъ $= \sqrt[3]{\frac{nc^2a^2}{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{nc^2a^2}}{a}$; и $\sqrt[3]{\frac{3}{5} \times 25} = \sqrt[3]{\frac{75}{125}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{5}$. Равнымъ образомъ $\sqrt[4]{\frac{c}{an} \times a^3n^3} = \sqrt[4]{\frac{ca^3n^3}{a^4\,{}^4}} = \frac{\sqrt[4]{ca^3n^3}}{an}$. Но дабы по извлеченіи корня изобразить числителя данной дроби безъ кореннаго знака, то сперва умножъ числителя и знаменателя данной дроби, числителемъ, возвышеннымъ въ степень кореннаго показателя единицею уменьшеннымъ, а потомъ извлекши требуемой корень, будешь имѣть

желаемую дробь, *на примѣръ*: $\sqrt[2]{\frac{a}{c}}$, по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ a, будетъ $\sqrt[2]{\frac{a^2}{ac}}=\frac{a}{\sqrt{ac}}$; также $\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}$, по умноженіи числителя и знаменателя чрезъ a^2 будетъ $=\sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2c^2}}=\frac{a}{\sqrt[3]{a^2c^2}}$, и $\sqrt[3]{\frac{4}{7}\times 16}=\sqrt[3]{\frac{64}{112}}=\frac{4}{\sqrt[3]{112}}$. Равнымъ образомъ $\sqrt[4]{\frac{c}{n^2}\times c^3}=\sqrt[4]{\frac{c^4}{n^2c^3}}=\frac{c}{\sqrt[4]{n^2c^3}}$. и проч.

§ 85. *Теорема*. Всякой квадратной корень имѣетъ два рѣшенія, то есть знакъ предъ корнемъ долженъ быть $+$ или $-$.

Доказат. Положимъ, что извлекается квадратной корень изъ a^2, то будетъ $\sqrt[2]{a^2}=\pm a$; ибо $a^2=+a\times+a$, также $a^2=-a\times-a$, слѣдовательно всякой квадратъ положительной величины имѣетъ всегда два корня, или положительной или отрицательной.

§ 86. *Прибавлен*. Изъ сего явствуетъ, что всякой корень чотнаго числа имѣетъ два корня, то есть или положительной или отрицательной, *на примѣръ*: $\sqrt[4]{p^8}=\pm p^2$, поелику $p^8=+p^2\times+p^2\times+p^2\times+p^2=-p^2\times-p^2\times-p^2\times-p^2$. и прочая.

§ 87. *Слѣдств*. Изъ сего удобно можно разумѣть, что всякой корень изъ отрицательной величины, *на примѣръ*: $\sqrt[2]{-a^2}$ есть количество невозможное; поелику оно не можетъ

про-

произойти ни отъ + ни отъ —; ибо $+a \times +a = a^2$, также и $-a \times -a = +a^2$; по сей причинѣ корень изъ $-a^2$, означается слѣдующимъ образомъ: $\pm\sqrt{-a^2}$; также всякой корень чотнаго числа изъ отрицательной величины будетъ количество невозможное, *на примѣръ*: $\pm\sqrt[4]{-a^4}$. Такія количества именуются мнимыя.

§ 88. *Задача*. Изъ сложной величины $a^2 + 2ab + b^2$ извлечь квадратной корень.

Рѣшен. Дабы показать, какимъ образомъ находится квадратной корень изъ сложныхъ количествъ, то должно сперва разсмотрѣть, что квадратъ количества $a + b = a^2 + 2ab + b^2$ (§ 59) состоитъ изъ квадрата первой части a, то есть a^2; изъ произведенія первой части a на вторую b, дважды взятаго, то есть $2ab$; и изъ квадрата b^2 второй части b. И такъ написавши данное количество, какъ слѣдуетъ: 1) сыщи прежде корень квадрата изъ перваго члена a^2, которой есть a; написавши оной по правую сторону за

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt[2]{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b \text{ корен.}} \\ \multicolumn{2}{l}{a^2} \\ \hline 2a + b & 2ab + b^2 \\ & 2ab + b^2. \end{array}$$

чертою, вычти квадратъ сего корня изъ $a^2 + 2ab + b^2$, останется $2ab + b^2$; а чтобъ найти второй членъ корня, раздѣли $2ab$ на удвоенную первую часть корня, то есть на $2a$, частное $+b$ будетъ вторая часть корня, которою умножа удвоенной первой членъ $2a$ и сложа сіе произведеніе съ b^2, вычти изъ остатка $2ab + b^2$,

 оста-

останется o. 2) По сысканiи первой части a, естьли разсмотрѣть остатокъ $2ab + b^2$, то найдется, что онъ состоитъ изъ двухъ множителей $(2a + b) b$ (§ 66); того ради написавши удвоенную первую часть по лѣвую сторону остатка за чертою, какъ изъ примѣра видно, и раздѣля первой членъ остатка на $2a$, частное $+ b$ придай къ $2a$; потомъ поставя оное подлѣ первой части корня a, умножъ сею второю частiю b количество $2a + b$, написанное по лѣвую сторону, произведенiе $2ab + b^2$ вычти изъ остатка. И такъ посредствомъ перваго или втораго рѣшенiя найдется требуемой корень $a + b$. А чтобы увѣриться о справедливости сего рѣшенiя, то умножъ найденной корень $a + b$ чрезъ $a + b$, произведенiе $a^2 + 2ab + b^2$ будетъ данной квадратъ.

§ 89. *Задача.* Найти корень квадрата предложенной величины $9x^4 - 6x^2d + d^2$.

Рѣшен. Написавши данное количество, какъ слѣдуетъ, должно сперва найти квадратной корень какъ изъ предстоящаго 9, такъ и изъ x^4, которой будетъ $= 3x^2$; и поставя оной на мѣстѣ корня за чертою съ правой руки, вычти квадратъ сего

$$\sqrt[2]{(9x^4 - 6x^2d + d^2)} = 3x^2 - d \text{ иском. корен.}$$

$$\begin{array}{l|l} & 9x^4 \\ \hline 6x^2 - d & -6x^2d + d^2 \\ & -6x^2d + d^2 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

корня $+ 9x^4$, изъ $9x^4 - 6x^2d + d^2$; потомъ поставя удвоенную первую часть корня по лѣвую сторону остатка, какъ и прежде, раздѣли чрезъ

оную

оную первую часть остатка $-6x^2d$, частное $-d$ припиши къ $6x^2$, также и къ первой части корня $3x^2$, какъ изъ примѣра видно; наконецъ умножа сею второю частію корня $-d$, написанное по лѣвую сторону количество $6x^2-d$, произведеніе $-6x^2d+d^2$ вычти изъ остатка; и такъ искомой корень будетъ $3x^2-d$.

§ 90. *Задача.* Найти квадратной корень изъ данной величины $c^4+6c^2b+9b^2-2nc^2-6nb+n^2$.

Рѣшен. Сыскавши изъ величины $c^4+6c^2b+9b^2$, корень квадрата c^2+3b, какъ въ предъидущей задачѣ показано, умножъ оной чрезъ 2, произведеніе $2c^2+6b$ напиши по лѣвую сторону

$$\sqrt[2]{}(c^4+6c^2b+9b^2-2nc^2-6nb+n^2)=c^2+3b-n \text{ кор.}$$

$$\begin{array}{l|l} & c^4 \\ \hline 2c^2+3b & 6c^2b+9b^2 \\ & 6c^2b+9b^2 \\ \hline 2c^2+6b-n & -2nc^2-6nb+n^2 \\ & -2nc^2-6nb+n^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

остатка $-2nc^2$ и прочая; потомъ раздѣли первой членъ остатка $-2nc^2$ на первой членъ $2c^2$ написанной величины по лѣвую сторону, частное $-n$ припиши къ корню c^2+3b и къ удвоенному количеству $2c^2+6b$; наконецъ умножа количество $2c^2+6b-n$ чрезъ третью часть корня $-n$, произведеніе $-2nc^2-6nb+n^2$ вычти изъ остатка, чрезъ что найдется требуемой корень c^2+3b-n.

Такимъ

Таким же образом извлекается квадратной корень и из других сложных количеств, ежели только оныя будут совершенные квадраты. Как из следующих примеров видно:

Пример I.

$$\sqrt{}(b^4+2b^3+3b^2+2b+1(=b^2+b+1 \text{ ис. корен.}$$

$$b^4$$

$$2b^2+b \,|\, 2b^3+3b^2$$
$$2b^3+b^2$$

$$2b^2+2b+1 \,|\, 2b^2+2b+1$$
$$2b^2+2b+1$$

$$0$$

Пример II.

$$\sqrt{}(9a^4-30a^2b^2c+25b^4c^2+42a^2c^2-70b^2c^3+49c^4)$$
$$9a^4 \qquad 3a^2-5b^2c+7c^2. \text{ иск. кор.}$$

$$6a^2-5b^2c \,|\, -30a^2b^2c+25b^4c^2$$
$$-30a^2b^2c+25b^4c^2$$

$$6a^2-10b^2c+7c^2 \,|\, 42a^2c^2-70b^2c^3+49c^4$$
$$42a^2c^2-70b^2c^3+49c^4$$

$$0$$

Пример III.

$$\sqrt{}(\tfrac{4}{9}b^2+bc^2+\tfrac{9}{16}c^4+\tfrac{8}{15}bd^3+\tfrac{3}{5}c^2d^3+\tfrac{4}{25}d^6)\tfrac{2}{3}b+\tfrac{3}{4}c^2+\tfrac{2}{5}d^3$$
$$\tfrac{4}{9}b^2$$

$$\tfrac{4}{3}b+\tfrac{3}{4}c^2 \,|\, bc^2+\tfrac{9}{16}c^4$$
$$bc^2+\tfrac{9}{16}c^4$$

$$\tfrac{4}{3}b+\tfrac{3}{2}c^2+\tfrac{2}{5}d^3 \,|\, \tfrac{8}{15}bd^3+\tfrac{3}{5}c^2d^3+\tfrac{4}{25}d^6$$
$$\tfrac{8}{15}bd^3+\tfrac{3}{5}c^2d^3+\tfrac{4}{25}d^6$$

§ 91. *Задача.* Изъ даннаго квадрата 207,942 извлечь его корень.

Рѣшен. Раздѣля данное число отъ правой руки къ лѣвой на классы какъ въ § 69 показано, будетъ извѣстно, что корень сего квадрата, въ разсужденіи классовъ, состоитъ изъ трехъ знаковъ: образецъ же второй степени двучастнаго корня $a + b = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$. И такъ для извлеченія корня изъ даннаго числа, разсматривай по таблицѣ § 57. отъ какого числа будетъ ближайшій квадратъ къ числу 20, составляющему первой классъ квадрата; найдется 16, коего корень $4 = a$ напиши съ правой руки за чертою, какъ изъ примѣра видно; вычти квадратъ онаго 16 изъ 20, къ остатку 4 припиши второй класъ 79, потомъ удвоенную первую часть корня, то есть $8 = 2a$ напиши по лѣвую сторону остатка: но поелику послѣдній знакъ произведенія первой части на вторую дважды взятаго, оканчивается въ первомъ знакѣ втораго класса (§ 69 *Слѣдств.* 2), по сей причинѣ отдѣля одинъ знакъ отъ правой руки точкою, раздѣли оставшееся къ лѣвой рукѣ число 47, на удвоенную первую часть, то есть на 8, частное число 5 будетъ вторая часть корня $= b$, которую приписавши къ корню

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt[2]{20,79,42}\,(456 = \text{корню} \\
 & 16 \\
\hline
85 & 47.9 \\
 & 425 \\
\hline
906 & 544.2 \\
 & 5436 \\
\hline
 & 6 \text{ остатокъ}
\end{array}
$$

нію 4 съ правой руки, умножь удвоенную первую часть $8=2a$ второю частію 5, подъ симъ произведеніемъ $40=2ab$ подпиши на особливомъ мѣстѣ квадратъ второй части такимъ образомъ: $\begin{smallmatrix}40\\25\end{smallmatrix}$, коихъ сумма будетъ $425=2ab+b^2$, или все равно, къ удвоенной первой части придай вторую часть $5=b$, потомъ сіе число $85=2a+b$ умножь второю частію 5; произведеніе 425 равное прежнему, вычти изъ остатка 479 *), останется 54, къ сему числу припиши послѣдній классъ квадрата; потомъ найденныя двѣ первыя части $45=a$ умноживъ чрезъ 2, произведеніе $90=2a$ поставь съ лѣвой стороны остатка, и отдѣля въ остаткѣ одинъ отъ правой руки знакъ 2 точкою, раздѣли 544 на 90, частное число 6, будетъ третья часть корня $=b$; которую написавши въ корнѣ съ правой руки, придай къ числу 90, будетъ 906 $=(2a+b)$; наконецъ сіе число умножь чрезъ третью часть 6, произведеніе $5436=(2a+b)b$, вычти изъ остатка 5442 **). И такъ найденной корень будетъ 456 съ остаткомъ 6; которой ежели умножится самимъ собою одинъ разъ, и къ сему произведенію придастся остатокъ 6, то выдетъ предложенной квадратъ 207942.

§ 92.

*) Иногда произведеніе изъ суммы, дважды взятой первой части со второю на вторую же часть, бываетъ больше того числа, изъ котораго вычитать должно; въ такомъ случаѣ найденную чрезъ дѣленіе вторую часть надлежитъ уменьшить единицею, а иногда 2мя, и потомъ производить дѣйствіе, какъ показано.

**) И въ семъ произведеніи, тожъ должно наблюдать, что сказано въ предъидущемъ примѣчаніи о первомъ.

§ 92. *Прибавл.* Хотя не всегда можно сыскивать совершенные корни изъ квадратныхъ чиселъ, какъ *на примѣръ*: изъ чиселъ 2, 3, 5 и проч. (коихъ корни означаются чрезъ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и проч.) однакожъ можно оные безъ погрѣшности изображать посредствомъ десятичныхъ дробей почти совершенными; естьли только къ предложенному числу придастся нѣсколько разъ по два нуля, *на примѣръ*: для извлеченія квадратнаго корня изъ числа 5, придай къ оному четыре или шесть нулей; потомъ раздѣля на классы, извлеки квадратной корень какъ слѣдуетъ; чрезъ что найдется квадратной корень 2.236‴, въ коемъ заключается двѣ единицы съ 236 тысячными частями; которой безъ погрѣшности почитать можно совершеннымъ.

$$\sqrt{(5,00,00,00)}\,2.236'''$$

	4
42	100
	84
443	1600
	1329
4466	27100
	26796
	304

Примѣч. Изъ сего видно, что совершенный корень неизвлекомаго числа; *на прим.* $\sqrt{5}$ можно изобразить только какою нибудь дробью; ибо ежели положимъ, что дробь $\frac{a}{b}$ есть совершенный корень количества 5, то будетъ $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, посему квадратъ $5=\frac{aa}{bb}$ можно безъ погрѣшности принять за подлинной, поелику при извлеченіи корней остатки десятичныхъ дробей за ничто почитаются.

§ 93.

§ 93. *Задача.* Даннаго количества $x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$ найти корень куба или корень третьей степени.

Рѣшен. Поелику кубъ количества $a + b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, состоитъ изъ куба первой части a, и изъ произведенія квадрата первой части a трижды взятаго, на вторую b, то есть $3a^2b$; также изъ произведенія трижды взятой первой части a на квадратъ второй части b, то есть $3ab^2$, и изъ куба второй части b (§ 59). И такъ написавши данное количество, какъ слѣдуетъ: сыщи прежде корень третьей степени изъ x^3, которой будетъ $= x$; потомъ написавши оной по правую сторону даннаго куба за чертою, вычти кубъ сего корня, то есть x^3 изъ предложеннаго

$$\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2c + 3xc^2)} \; x + c$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \\ \hline 3x^2 + 3xc + c^2 & 3x^2c + 3xc^2 + c^3 \\ \times c & 3x^2c + 3xc^2 + c^3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

куба, останется $3x^2c + 3xc^2 + c^3$; а для сысканія второй части корня, раздѣли первой членъ остатка $3x^2c$ на утроенной квадратъ первой части корня x, то есть на $3x^2$, частное c будетъ вторая часть корня; которую придавши къ первой части корня x, умножь утроенной квадратъ первой части x, то есть $3x^2$ второю частію c; потомъ умножа трижды взятую первую часть то есть $3x$ квадратомъ второй части c, то есть чрезъ c^2 придай къ симъ двумъ произведеніямъ, кубъ второй части c, то есть c^3, и напослѣдокъ вычти сію сумму,

то

то есть $3x^2c + 3xc^2 + c^3$ изъ остатка. И такъ искомой корень куба будетъ $x+c$, которой ежели умножится самъ собою два раза, то произведенiе будетъ данное количество $x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$.

§ 94. *Задача.* Изъ количества $8x^3 + 12x^2n + 6xn^2 + n^3 + 12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4 + 3nd^4 + d^6$ извлечь корень третьей степени.

Рѣшен. Сперва надлежитъ сыскать кубической корень, какъ изъ предстоящаго 8, такъ и изъ x первой величины $8x^3$, которой будетъ съ предстоящимъ $= 2x$, что написавши съ правой руки за чертою, вычти кубъ сего корня, то есть $8x^3$ изъ предложенной величины, останется $12x^2n + 6xn^2 + n^3$ и проч. потомъ сообразуясь съ кубомъ величины $a+b$, которой есть $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, найдется вторая часть корня, естьли только первая часть остатка $12x^2n$, раздѣлится на утроенной квадратъ первой части, то есть на $12x^2$, частное n будетъ вторая часть, которую приписавши къ первой части корня, умножь $12x^2$ второю частiю n, произведенiе будетъ $12x^2n$; потомъ трижды взятую первую часть, то есть $6x$, умножь квадратомъ

второй части, то есть n^2, произведеніе будетъ $6xn^2$; придавши къ симъ двумъ произведеніямъ кубъ n^3 второй части, сумму ихъ $12x^2n + 6xn^2 + n^3$, вычти изъ остатка, останется $12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2$ и проч. Дабы найти третью часть корня, то умножь найденныя двѣ первыя части $2x + n$ квадратно, происшедшей отъ сего квадратъ $4x^2 + 4xn + n^2$ умножь 3мя, произведеніе будетъ $12x^2 + 12xn + 3n^2$; потомъ первую часть остатка $12x^2d^2$ раздѣли на первую часть утроеннаго квадрата двухъ первыхъ частей, то есть на $12x^2$, частное d^2 будетъ третья часть искомаго корня, которую приписавъ къ двумъ частямъ съ правой руки, умножь чрезъ оную утроенной квадратъ двухъ первыхъ частей, произведеніе будетъ $12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3nd^2$; потомъ умноживъ трижды взятыя двѣ первыя части, то есть $6x + 3n$, квадратомъ третьей части d^2, произведеніе $6xd^4 + 3nd^4$ сложа съ первымъ произведеніемъ и кубомъ d^6 третьей части, сумму ихъ $12x^2d^2 + 12xnd^2 + 3n^2d^2 + 6xd^4 + 3nd^4 + d^6$ вычти изъ остатка, чрезъ что найдется требуемой корень $2x + n + d^2$, которой ежели умножится самъ собою два раза, то произведеніе будетъ равно предложенному кубу.

$\sqrt[3]{}$

$$\sqrt[3]{}\,(8x^3+12x^2n+6xn^2+n^3+12x^2d^2+12xnd^2+3n^2d^2+6xd^4+3nd^4+d^6)\,2x+n+d^2$$

$$8x^3$$

$$12x^2 \mid 12x^2n+6xn^2+n^3$$

$$12x^2n+6xn^2+n^3$$

$$12x^2 \mid 12x^2d^2+12xnd^2+3n^2d^2+6xd^4+3nd^4+d^6$$

$$12x^2d^2+12xnd^2+3n^2d^2+6xd^4+3nd^4+d^6$$

$$0$$

§ 95. *Прибавлен.* I. Ежели данное количество будетъ совершенной кубъ, то сыскавши корень куба первой части, какъ въ предъидущей задачѣ показано, слѣдуетъ только раздѣлить на квадратъ сей части всѣ тѣ величины даннаго куба, въ коихъ заключается квадратъ первой части, частное число покажетъ прочія части искомаго корня, какъ *на примѣръ*: въ предъидущемъ предложеніи квадратъ первой части, трижды взятой, есть $12x^2$, а тѣ величины, въ коихъ находится квадратъ первой части, суть $12x^2n + 12x^2d^2$, которыя раздѣля на $12x^2$, частное $n + d^2$ будутъ двѣ послѣднія части искомаго корня.

§ 96. *Прибавлен.* II. Такимъ же образомъ сыскивается кубической корень и изъ другихъ сложныхъ количествъ, ежели только оныя будутъ совершенные кубы, какъ *на примѣръ*: корень куба изъ величины $27n^6 + 54n^4c + 36n^2c^2 + 8c^3 - 27n^4b - 36n^2cb - 12c^2b + 9n^2b^2 + 6cb^2 - b^3$ найдется, естьли сперва извлечется корень куба изъ $27n^6$, которой будетъ $= 3n^2$; а потомъ раздѣлятся величины $54n^4c - 27n^4b$ (въ коихъ заключается квадратъ первой буквы корня n^2) на утроенной квадратъ первой части, то есть $54n^4c - 27n^4b$ на $27n^2$, частное $2c - b$ покажетъ двѣ послѣднія части корня; слѣдовательно корень куба предложенной величины будетъ $3n^2 + 2c - b$ *).

Ра-

*) Случиться можетъ, что иногда квадраты первой части заключаются во многихъ членахъ и несовершеннаго куба; но дабы въ такомъ случаѣ не обмануться, то

Равнымъ образомъ найдется кубической корень изъ величины $\frac{8}{27}n^3 - \frac{2}{3}n^2b + \frac{1}{2}nb^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{8}{3}n^2x^3 - 4nbx^3 + \frac{3}{2}b^2x^3 + 8nx^6 - 6bx^6 + 8x^9$, естьли только сперва извлечется корень куба изъ предстоящаго $\frac{8}{27}$ и величины n^3 перваго члена, которой будетъ $= \frac{2}{3}n$, а потомъ совершится дѣйствіе, какъ въ § 95 показано, то есть раздѣля тѣ величины, въ коихъ заключается квадратъ первой буквы корня n, на утроенной квадратъ первой части $\frac{2}{3}n$: то есть $-\frac{2}{3}n^2b + \frac{8}{3}n^2x^3$ на $\frac{4}{9}n^2 \times 3 = \frac{4}{3}n^2$, частное $-\frac{1}{2}b + 2x^3$ покажетъ двѣ послѣднія части корня. И такъ кубической корень предложенной величины будетъ $= \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}b + 2x^3$, которой ежели умножится самъ собою два раза, то произведеніе будетъ равно данному кубу.

§ 97. *Задача.* Изъ даннаго куба 34,965,783 найти его корень.

Рѣшен. Раздѣля данное число отъ правой руки къ лѣвой на классы какъ въ § 73 показано, извѣстно будетъ, что кубической корень предложенной величины въ разсужденіи классовъ состоитъ изъ трехъ знаковъ; изображеніе же третьей степени величины $a+b=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. И такъ для извлеченія корня разсматривай по таблицѣ § 57 отъ какого числа будетъ ближайшій кубъ къ числу 34, составляющему первой классъ куба, найдется отъ числа 3хъ бли-

 жай-

то надлежитъ по сысканіи всѣхъ частей корня умножить самихъ собою два раза; естьли произведеніе будетъ равно данному кубу, то найденныя чрезъ помянутое дѣленіе части, означать будутъ совершенной корень.

жайшій кубъ 27, котораго корень $3=a$ написавши за чертою съ правой стороны, какъ изъ примѣра видно, вычти кубъ онаго $27=a^3$ изъ 34, къ остатку 7 припиши второй классъ 965; потомъ

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt[3]{34.965.783}\,(327 \\
 & 27 \\
27 & 79.65 \\
 & 5768 \\
\hline
3072 & 2197.83 \\
 & 219783
\end{array}
$$

квадратъ первой части 9, трижды взятой, то есть $27=3a^2$ напиши по лѣвую сторону остатка; но какъ послѣдній знакъ произведенія изъ квадрата первой части, трижды взятаго, на вторую часть, оканчивается въ первомъ знакѣ втораго класса (§ 73 сл. II), того ради отдѣля два знака остатка съ правой руки точкою, раздѣли оставшееся число къ лѣвой рукѣ 79, на квадратъ первой части 3, трижды взятой, то есть на 27, частное 2, будетъ вторая часть корня $=b$, которую приписавши къ первой части корня 3 съ правой стороны, умножь квадратъ первой части, трижды взятой, то есть $27=3a^2$, второю частію $2=b$; подъ симъ произведеніемъ $54=3a^2b$, подпиши на особенномъ мѣстѣ, произведеніе трижды взятой первой части, на квадратъ втораго члена, то есть $3\times3\times4=36=3ab^2$, а подъ симъ поставь кубъ второй части 8 такимъ образомъ:

$$
\begin{array}{r}
54 \\
36 \\
8 \\
\hline
5768
\end{array}
$$

сумму ихъ 5768 вычти изъ 7965 *); къ остатку 2197 припиши послѣдній классъ 783.

Теперь

*) Ежели случится, что помянутая сумма будетъ больше того количества, изъ котораго оную вычитать

Теперь положа двѣ первыя части корня $32=a$, умножь квадратъ сихъ частей чрезъ 3, произведенiе $3072=3a^2$ поставь по лѣвую сторону остатка; потомъ отдѣля въ остаткѣ два знака съ правой руки, для послѣднихъ двухъ частей куба точкою, раздѣли оставшееся къ лѣвой рукѣ число 21977, на утроенной квадратъ двухъ первыхъ частей, то есть на 3072, частное 7 будетъ третья часть искомаго корня $=b$; которую приписавъ въ корнѣ къ двумъ первымъ частямъ 32 съ правой руки, умножь квадратъ двухъ первыхъ частей, трижды взятой, то есть 3072 на вторую часть 7, подъ произведенiемъ $21504=3a^2b$ подпиши произведенiе трижды взятыхъ двухъ первыхъ частей, на квадратъ третьей части 7, то есть $32\times3\times49=4704=3ab^2$, а подъ симъ кубъ третьей части $343=b^3$, какъ предъ симъ показано; сумму ихъ 2197783 вычти изъ остатка; и такъ найденной корень куба будетъ 327, которой ежели умножится самъ собою два раза, то произведенiе будетъ равно данному кубу.

§ 98. *Прибавлен.* Ежели изъ даннаго куба совершеннаго корня извлечь не можно, то дабы подойти какъ можно ближе къ совершенству онаго, надлежитъ съ остаткомъ поступать какъ въ § 191 первой части показано, то есть точность корня изслѣдывать должно посредствомъ десятичныхъ дробей, какъ изъ слѣдующаго примѣра видно: Е 4 Изо-

---

тать должно; тогда найденная вторая часть, единицею или больше уменьшается; а потомъ уже производится дѣйствiе, какъ сказано.

Изображенiе третьей степени $a + b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\sqrt[3]{99.864}$(46.394‴
64
$3a^2 = 48$ | 358.64
| 333 36
$3a^2 = 6348$ | 25 280,00
| 19 168 47
643107 | 6 111 530,00
| 5 799 221 19
64620963 | 312 308810,00
| 258 506119 84
53 802690 16

$4 = a$
$4.4.3 = 48 = 3a^2$
$6 = b$
$288 = 3a^2b$
$3.4.36 = 432 = 3ab^2$
$216 = b^3$
$33336 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Потомъ положа $46 = a$, продолжай извлеченiе, по предписанному образцу далѣе.

§ 99. *Задача.* Изъ предложенной величины 1874161 найти корень четвертой степени.

Рѣшен. Прежде дѣйствiя надлежитъ себѣ представить изображенiе четвертой степени количества $a + b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, съ которою бы соображаясь можно было, извлекать корень четвертой степени. И такъ раздѣля данное число отъ правой руки къ лѣвой на классы, считая въ каждой по 4 знака, не смотря на то, что иногда въ послѣднемъ классѣ отъ лѣвой руки останется одинъ, два или три знака (что также за классъ почитается); число классовъ покажетъ, изъ коликихъ знаковъ корень четвертой степени состоять долженъ, какъ здѣсь изъ двухъ; потомъ раз-

$\sqrt[4]{}$

$$\sqrt[4]{187,4161}\,(37=a+b$$

$$
\begin{array}{l}
81 \\
\hline
108 \mid 1064,161 \\
\quad\;\; \mid 1064161 \\
\hline
\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a^4=81 \\
4a^3=108 \\
b=7 \\
\hline
4a^3b=756 \\
6a^2b^2=2646 \\
4ab^3=4116 \\
b^4=2401 \\
\hline
\end{array}
$$

$$4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=1064161$$

смапривай, опъ какого числа будетъ ближайшая четвертая степень къ числу 187 перваго класса, найдется опъ 3хъ, что будетъ первая часть искомаго корня; которую написавъ по правую сторону данной величины за чертою, и положа $3=a$, возвысь оную въ четвертую степень, будетъ $a^4=81$; сіе число вычти изъ перваго класса 187, къ остатку 106 припиши слѣдующій классъ 4161; потомъ найденную первую часть $3=a$, возвыся въ третью степень, умножь чрезъ 4, произведеніе $108=4a^3$ напиши по лѣвую сторону остатка, и отдѣля опъ правой руки три знака точкою, оставшееся количество 1064 раздѣли на кубъ первой части, четырежды взятой, то есть на 108, частное хотя и будетъ 9; но сего числа, какъ по дѣйствію окажется, за вторую часть корня принять не можно, и для того уменьшивъ оное 2 мя, будетъ вторая часть искомаго корня $7=b$; умножь сею частію кубъ первой части, четырежды взятой, то есть 108, произведеніе $756=4a^3b$ напиши на особомъ мѣстѣ; потомъ смотря на предложенной образецъ, умножь квадратъ пер-

вой части шесть разъ взятой квадратомъ второй части, произведенiе будетъ $2646 = 6a^2b^2$; также первую часть корня 3, четырежды взятую, умножь кубомъ второй части, произведенiе будетъ $4116 = 4ab^3$; и накопецъ сыщи четвертую степень второй части корня 7, которая будетъ $2401 = b^4$; потомъ написавши всѣ оныя произведенiя одно подъ другимъ однимъ знакомъ впередъ, какъ въ примѣрѣ показано, вычти сумму ихъ 1064161 изъ остатка, чрезъ что найдется корень четвертой степени $= 37$, которой ежели умножится самъ собою три раза, то произойдетъ данное количество 1874161.

О изображенiи корней изъ несовершенныхъ степеней безконечнымъ рядомъ, приближаясь къ истинному корню.

§ 100. *Опредѣл.* Несовершенною степенью именуется та величина, изъ которой дѣйствительнаго корня найти не можно.

§ 101. *Задача.* Изъ несовершеннаго квадрата $c^2 + d^2$ извлечь квадратной корень.

Рѣшен. Сперва сыщи корень квадрата изъ первой части c^2, которой будетъ равенъ c, что написавши съ правой стороны за чертою, вычти квадратъ сего корня, то есть c^2 изъ даннаго количества, останется d^2; потомъ написавши удвоенную первую часть корня по лѣвую сторону остатка, раздѣли на оную остатокъ

токъ d^2; частное $\frac{d^2}{2c}$ будетъ вторая часть кор-

$$V(c^2 + d^2)\; c + \frac{d^2}{2c} - \frac{d^4}{8c^3} + \frac{d^6}{16c^5} - \frac{5d^8}{128c^7} \text{ и проч.}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & c^2 \\ \hline
2c + \frac{d^2}{2c} & d^2 \\
 & d^2 + \frac{d^4}{4c^2} \\ \hline
2c + \frac{d^2}{c} - \frac{d^4}{8c^3} & -\frac{d^4}{4c^2} \\
 & -\frac{d^4}{4c^2} - \frac{d^6}{8c^4} + \frac{d^8}{64c^6} \\ \hline
2c + \frac{d^2}{c} - \frac{d^4}{4c^3} + \frac{d^6}{16c^5} & \frac{d^6}{8c^4} - \frac{d^8}{64c^6} \\
 & \frac{d^6}{8c^4} + \frac{d^8}{16c^6} - \frac{d^{10}}{64c^8} + \frac{d^{12}}{256c^{10}} \\ \hline
 & -\frac{5d^8}{64c^6} + \frac{d^{10}}{64c^8} - \frac{d^{12}}{256c^{10}}
\end{array}$$

ня, которую приписавъ къ первой части корня, и къ 2c по лѣвую сторону остатка, сумму $2c + \frac{d^2}{2c}$ умножь второю частію $\frac{d^2}{2c}$, произведеніе $d^2 + \frac{d^4}{4c^2}$ вычти изъ d^2, останется $-\frac{d^4}{4c^2}$. Для сысканія третьей части корня, умножь найденныя двѣ первыя части чрезъ 2, произведеніе $2c + \frac{d^2}{c}$ напиши по лѣвую сторону остатка, потомъ раздѣля $-\frac{d^4}{4c^2}$ на первую часть $2c$ помянутаго произведенія, частное $-\frac{d^4}{8c^3}$ будетъ третья часть корня, которую приписавъ къ двумъ первымъ частямъ по правую сторону

кор-

корня, и къ двойному произведенію двухъ первыхъ частей по лѣвую сторону находящихся, умножь сію сумму $2c + \frac{d^2}{c} - \frac{d^4}{8c^3}$, третіею частію корня $-\frac{d^4}{8c^3}$, произведеніе $-\frac{d^4}{4c^2} - \frac{d^6}{8c^4} + \frac{d^8}{64c^6}$ вычти изъ $-\frac{d^4}{4c^2}$, останется $+\frac{d^6}{8c^4} - \frac{d^8}{64c^6}$. И такъ далѣе продолжая дѣйствіе, какъ показано въ § 90 и предложеннаго примѣра видно, найдется четвертая часть $+\frac{d^6}{16c^5}$, пятая $-\frac{5d^8}{128c^7}$ и проч. части корня, коихъ сумму безъ всякой погрѣшности за совершенной корень принять можно.

Такимъ же образомъ сыщется корень квадрата и изъ величины $m - d$, гдѣ первая часть корня будетъ $m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}$ (§ 81), посредствомъ которой найдутся и прочія части, какъ въ предъидущей задачѣ показано, что изъ слѣдующаго примѣра видѣть можно.

$$\sqrt[2]{(m - d)}\ m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}} - \frac{d^2}{8m^{\frac{3}{2}}} - \frac{d^3}{16m^{\frac{5}{2}}} \text{ и проч.}$$

$$m$$

$$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}} \Big| \begin{array}{l} -d \\ -d + \frac{d^2}{4m} \end{array}$$

$$2m^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{d^2}{8m^{\frac{3}{2}}} \Big| \begin{array}{l} -\frac{d^2}{4m} \\ -\frac{d^2}{4m} + \frac{d^3}{8m^2} + \frac{d^4}{64m^3} \end{array}$$

$$\Big| \begin{array}{l} -\frac{d^3}{8m^2} - \frac{d^4}{64m^3} \\ -\frac{d^3}{8m^2} + \frac{d^4}{16m^3} + \frac{d^5}{64m^4} + \frac{d^6}{256m^5} \end{array}$$

$$\text{остатокъ} = -\frac{5d^4}{64m^3} - \frac{d^5}{64m^4} - \frac{d^6}{256m^5}$$

§ 102. *Прибавлен.* Помянутое изображаніе корней изъ несовершенной степени безконечнымъ рядомъ удобнѣе выводить посредствомъ неопредѣленной степени; поелику когда уже намъ извѣстны правила, какимъ образомъ величина $a+b$ возвышается въ неопредѣленную степень n (§ 63), какъ-то $(a+b)^n = a^n(1 + \frac{n}{1}.\frac{b}{a} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{b^3}{a^3} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{b^4}{a^4}$ и проч.), то сія степень послужитъ намъ общимъ образцемъ къ извлеченію всякихъ родовъ корней; ибо предъ симъ уже показано, что корни всякой степени изображаться могутъ безъ коренныхъ знаковъ, такою величиною, у которой показатель будетъ дробь, какъ *на примѣръ*: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ и такъ далѣе; также $\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ и проч. По сей причинѣ, для изображенія квадратнаго корня изъ несовершенной степени безконечною строкою, *на примѣръ*: изъ величины x^2+c^2, должно только поставить въ предложенномъ общемъ образцѣ $\frac{1}{2}$ вмѣсто n, то величины изображающія предстоящихъ, произойдутъ слѣдующія: $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$ и проч. изъ коихъ ежели найдутся показаннымъ (въ § 59) порядкомъ предстоящія, и поставятся x^2 вмѣсто a и c^2 вмѣсто b, то помянутая степень $(a+b)^n = (x^2+c^2)^n$ изобразится слѣдующимъ образомъ:

зомъ: $(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}=x^{2\cdot\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{x^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{c^4}{x^4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{c^6}{x^6}-\frac{5c^8}{128x^8}+\right.$ и проч. $\left.\right)=x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{x^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{c^4}{x^4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{c^6}{x^6}-\frac{5}{128}\cdot\frac{c^8}{x^8}\right.$ и прочая$\left.\right)=x+\frac{c^2}{2x}-\frac{c^4}{8x^3}+\frac{c^6}{16x^5}-\frac{5c^8}{128x^7}$ и проч. $=\sqrt{(x^2+c^2)}.=$ квадратному корню предложенной величины x^2+c^2.

Равнымъ образомъ сыщется корень квадрата изъ предложенной въ § 101 величины $m-d$, какъ явствуетъ: $\sqrt{(m-d)}=(m-d)^{\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{d}{2m}-\frac{d^2}{8m^2}-\frac{d^3}{16m^3}-\frac{5d^4}{128m^4}\right.$ и проч. $\left.\ldots\right)=m^{\frac{1}{2}}-\frac{d}{2m^{\frac{1}{2}}}-\frac{d^2}{8m^{\frac{3}{2}}}-\frac{d^3}{16m^{\frac{5}{2}}}-\frac{5d^4}{128m^{\frac{7}{2}}}$, — и проч. $=\sqrt{m}-\frac{d}{2\sqrt{m}}-\frac{d^2}{8\sqrt{m^3}}-\frac{d^3}{16\sqrt{m^5}}-\frac{5d^4}{128\sqrt{m^7}}$ и проч. въ которомъ ежели число m будетъ квадратное, на примѣръ: $m=c^2$, то будетъ $\sqrt{m}=c$, тогда уже показанной корень изобразится такимъ образомъ: $\sqrt{(m-d)}=c-\frac{d}{2c}-\frac{d^2}{8c^3}-\frac{d^3}{16c^5}-\frac{5d^4}{128c^7}$ и проч.

§ 103. *Задача.* Изъ даннаго числа 13 найти ближайшій квадратный корень.

Рѣшен. Раздѣля данное число на двѣ части, такъ чтобы первая часть (а естьли можно и другая) была совершенной квадратъ на пр $9+4$, положи $9=a$ $4=b$; потомъ сообразуясь съ показанною въ предъидущемъ прибавленіи неопредѣлен-

дѣленною степенью $(a+b)^n = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, изобрази данное количество безконечнымъ рядомъ степени $\frac{1}{2}$, который будетъ слѣдующій: $\sqrt{13} = (9+4)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} - \frac{1}{8}\cdot\frac{16}{81} + \frac{1}{16}\cdot\frac{64}{729} - \frac{5}{128}\cdot\frac{256}{6561}$ и про.$)$ $= 3(1 + \frac{2}{9} - \frac{2}{81} + \frac{4}{729} - \frac{10}{6561} +$ и проч.$)$ $= 3 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{4}{243} - \frac{10}{218} +$ и проч. $= 3\frac{166}{243} - \frac{172}{2187} = 3\frac{1322}{2187}$ есть искомой корень; который безъ чувствительной погрѣшности принять можно совершеннымъ; ибо когда оной умножится самъ собою, то произведеніе $12\frac{4745861}{4782969}$ отъ истиннаго квадрата 13, различествовать будетъ не болѣе какъ $\frac{37108}{4782969}$ или почти $\frac{1}{128}$ частію.

§ 104. *Прибавлен.* Равнымъ образомъ изобразить можно, безконечнымъ рядомъ корень третьей степени, *на примѣръ*: изъ величины $c+x$; ибо когда $\sqrt[3]{(c+x)} = (c+x)^{\frac{1}{3}}$, то по общему неопредѣлениой степени изображенію, будетъ $n = \frac{1}{3}$; по сей причинѣ части предстоящихъ будутъ слѣдующія: $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ и проч. изъ коихъ ежели сыскавши показаннымъ (въ § 59) порядкомъ предстоящихъ, поставишь въ общемъ изображеніи; то неопредѣленная степень даннаго количества изобразится такимъ образомъ: $\sqrt[3]{(c+x)} = (c+x)^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{x}{3c} - \frac{x^2}{9c^2} + \frac{5x^3}{81c^3} - \frac{10x^4}{243c^4} +$ и проч.$)$ $= \sqrt[3]{c} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{c^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{c^{\frac{5}{3}}} + \frac{5}{81}\cdot\frac{x^3}{c^{\frac{8}{3}}} - \frac{10}{243}\cdot\frac{x^4}{c^{\frac{11}{3}}}$ и проч. $= \sqrt[3]{c} + \frac{x}{3\sqrt[3]{c^2}} - \frac{x^2}{9\sqrt[3]{c^5}} + \frac{5x^3}{81\sqrt[3]{c^8}} - \frac{10x^4}{243\sqrt[3]{c^{11}}}$ и проч. въ которомъ

ромъ ежели положимъ, что количество c будетъ совершенной кубъ, то есть *на примѣръ*: $c = a.a.a = a^3$, то $\sqrt[3]{c} = a$; по сей причинѣ въ помянутомъ изображенiи уничтожатся всѣ коренные знаки, и для того будетъ $\sqrt[3]{(c+x)} = \sqrt[3]{(a^3+x)} = a + \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} + \frac{5x^3}{81a^8} - \frac{10x^4}{243a^{11}}$ и проч.

105. *Задача.* Помощiю предъидущаго предложенiя найти ближайшiй корень куба изъ числа 10.

Рѣшен. Раздѣля данное число на двѣ части, такъ чтобы первая часть была совершенной кубъ, *на примѣръ*: $8+2=10$, представь себѣ что $c=a^3=8, x=2$, то будетъ $8+2=10=c+x=a^3+x$, причемъ $\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a^3} = a = 2$. И такъ сообразуясь съ предписаннымъ неопредѣленной степени порядкомъ, изобрази $\sqrt[3]{(a^3+x)} = \sqrt[3]{(8+2)}$ неопредѣленнымъ числомъ членовъ; отъ чего произойдетъ $\sqrt[3]{(8+2)} = 8^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8} - \frac{1}{9}\cdot\frac{4}{64} + \frac{5}{81}\cdot\frac{8}{512} - \frac{10}{243}\cdot\frac{16}{4096}$ и проч.$) = 2(1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} + \frac{5}{5184} - \frac{5}{31104}$ и проч.$) = 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} + \frac{5}{2592} - \frac{5}{15552} = 2\frac{437}{2592} - \frac{221}{15552} = 2\frac{2401}{15552}$. Ежели сей корень умножится самъ собою два раза, то въ произшедшемъ отъ сего кубѣ $9\frac{3758892373153}{3761479876608}$, недостатокъ будетъ $\frac{2587503455}{3761479876608}$; и такъ сей кубъ отъ истиннаго 10 разнится почти только $\frac{1}{1454}$ частiю.

Примѣчан. Посредствомъ предписаннаго правила, изображается безконечною строкою корень четвертой степени и проч. ежели только вмѣсто n поставится $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ и проч.

О разныхъ изчисленіяхъ неизвлекомыхъ величинъ.

§ 106. *Теорема.* Неизвлекомая величина не перемѣнится, ежели показатель корня и показатель величины подъ знакомъ находящейся, чрезъ какое нибудь число умножится.

Доказат. Положимъ, что помянутыя показатели величины $\sqrt[3]{a^n}$, умножатся чрезъ 2, то будетъ $\sqrt[3]{a^n} = \sqrt[3\cdot 2]{a^{2\cdot n}} = \sqrt[6]{a^{2n}}$; ибо $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$ (§ 81), также $\sqrt[6]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{6}} = a^{\frac{n}{3}}$; слѣдовательно и $\sqrt[3]{a^n} = \sqrt[6]{a^{2n}}$ (§ 30 Часть 1 я).

§ 107. *Задача.* Неизвлекомыя количества, имѣющія разныхъ коренныхъ показателей, привесть къ одному показателю корня.

Рѣшен I. Ежели даны будутъ двѣ неизвлекомыя величины; то умножь кореннаго показателя и показателя величины подъ знакомъ находящейся перваго количества, показателемъ корня второй величины; а показателей кореннаго и величины подъ знакомъ находящейся втораго количества, показателемъ корня первой величины: то и будешь имѣть такія величины, кои имѣютъ одного кореннаго показателя и даннымъ количествомъ равныя. *На примѣръ*, дабы величины $\sqrt[2]{a}$ и $\sqrt[3]{b^2}$ привесть къ одному показателю корня; то умножь показателей 2 и 1 первой величины a чрезъ 3; потомъ показателей 3 и 2 втораго количества b показателемъ

2 первой величины, отъ чего данныя количества изображены будутъ слѣдующимъ образомъ:
$\sqrt[3\cdot2]{a^{1\cdot3}} = \sqrt[6]{a^3}$ и $\sqrt[3\cdot2]{b^{2\cdot2}} = \sqrt[6]{b^4}$.

II. Ежели должно будетъ нѣсколько коренныхъ величинъ привести къ одному показателю корня: то надлежитъ кореннаго показателя, и показателя величины подъ знакомъ находящейся каждаго количества, умножить произведеніемъ коренныхъ показателей прочихъ величинъ, отъ чего произшедшія величины будутъ имѣть одного кореннаго показателя, *на примѣръ*: для приведенія къ одному показателю корня трехъ величинъ $a\sqrt[n]{b^m}$, $c\sqrt[r]{d^s}$ и $\sqrt[x]{y^q}$, умножъ показателей n и m первой величины, произведеніемъ коренныхъ показателей второй и третьей величины, то есть чрезъ rx; потомъ показателей r и s второй величины, произведеніемъ nx первой и третьей величины; а напослѣдокъ показателей x и q третьей величины произведеніемъ rn первой и второй величины; тогда данныя количества $a\sqrt[n]{b^m}$, $c\sqrt[r]{d^s}$ и $\sqrt[x]{y^q}$ изобразятся слѣдующимъ образомъ: $a\sqrt[nrx]{b^{mrx}}$, $c\sqrt[nrx]{d^{snx}}$, и $\sqrt[nrx]{y^{qrn}}$, и будутъ равны даннымъ неизвлекомымъ количествамъ (§ 106).

§ 108. *Задача.* Не перемѣняя коренной величины, поставить предстоящее подъ коренной знакъ.

Рѣшен. Возвысивъ предстоящее количество въ степень кореннаго показателя, припиши

онуя

оную къ величинѣ подъ знакомъ находящейся, получишь требуемое изображенiе, *на примѣръ*: $b\sqrt[3]{d^2}$, возвысивъ предстоящее b въ третью степень, поставь подъ знакъ; будетъ $b\sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{b^3d^2}$; ибо $b\sqrt[3]{d^2} = bd^{\frac{2}{3}}$; также $\sqrt[3]{b^3d^2} = bd^{\frac{2}{3}}$, слѣдовательно и $b\sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{b^3d^2}$ (30. *Часть I*).

Равнымъ образомъ будетъ и величина $2\sqrt{3} = \sqrt{3.4} = \sqrt{12}$; также $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}.\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{45}}$; и вообще $a\sqrt[n]{b^s} = \sqrt[n]{b^s a^n}$; ибо $a\sqrt[n]{b^s} = a.b^{\frac{s}{n}}$, также $\sqrt[n]{b^s a^n} = b^{\frac{s}{n}}.a^{\frac{n}{n}} = ab^{\frac{s}{n}}$

109. *Слѣдств.* I. Изъ сего удобно можно видѣть, что для перестановки величины изъ подъ кореннаго знака на мѣсто предстоящаго, надлежитъ раздѣлить показателя той величины (естьли будетъ можно) на показателя корня; а потомъ съ показателемъ частнаго поставить оное внѣ знака, *на примѣръ*: $\sqrt[3]{ad^6}$ будетъ $= d^{\frac{6}{3}}\sqrt[3]{a} = d^2\sqrt[3]{a}$, ибо $\sqrt[3]{ad^6} = d^{\frac{6}{3}}a^{\frac{1}{3}} = d^2.a^{\frac{1}{3}} = d^2\sqrt[3]{a}$. Также коренная величина $\sqrt{ad^5}$ будетъ $= d^2\sqrt{ad}$; ибо $\sqrt{ad^5} = a^{\frac{1}{2}}d^{\frac{5}{2}} = d^2.a^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} = d^2\sqrt{ad}$.

Слѣдств. II. Изъ сего явствуетъ, что для уменьшенiя величины, находящейся подъ знакомъ, числомъ изображенной, должно представить

себѣ оное число въ двухъ множителяхъ, изъ коихъ бы одинъ составлялъ совершенную степень кореннаго показателя; а потомъ корень сего множителя, поставить внѣ знака, а другаго оставить подъ коренным знакомъ, *на примѣръ*: $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4\sqrt{3}$; ибо положи $16 = a^2, 3 = b$, гдѣ $a = 4$, то будетъ $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} = 4\sqrt{3}$, по предъидущему предложенiю. По той же причинѣ $3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$; ибо $3\sqrt{12} = 3\sqrt{4.3} = 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Также $\sqrt{\frac{5}{54}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$; и $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{5}ab} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}ab}$; равнымъ образомъ $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}ac} = \frac{2}{6}\sqrt{3ac} = \frac{1}{3}\sqrt{3ac}$, и прочая.

О сложенiи коренныхъ величинъ.

§ 110. *Задача.* Данныя двѣ или больше простыя неизвлекомыя величины сложить.

Рѣшен. Данныя коренныя величины, соединя только всѣ вмѣстѣ подлежащими ихъ знаками, какъ и простыя алгебраическiя величины, получишь требуемую сумму, *на примѣръ*: сумма коренныхъ величинъ $a\sqrt{d}$, и $c\sqrt{b}$ будетъ $= a\sqrt{d} + c\sqrt{b}$. Сумма количествъ $2\sqrt{a}$, и $\sqrt{a}$, сложа предстоящихъ, будетъ $= 2\sqrt{a} + \sqrt{a} = 3\sqrt{a}$; также сумма количествъ $2\sqrt{d}$ и $3\sqrt[3]{d}$ будетъ $= 2\sqrt{d} + 3\sqrt[3]{d}$; или по приведенiи къ одному коренному показателю, сумма сихъ количествъ $2\sqrt{d} + 3\sqrt[3]{d}$, будетъ $= 2\sqrt[6]{d^3} + 3\sqrt[6]{d^2}$. Также и сумма величинъ $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}$ бу-

будетъ $= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$; также сумма величинъ $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; но сумма величинъ $5\sqrt{3}$, и $- 3\sqrt{3}$ будетъ $= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

§ 111. *Прибавлен.* Посредствомъ сего правила также складываются и сложныя величины, какъ изъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{l} 3 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ \hline 4 + 2\sqrt{2} = \text{сумм.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{l} 3\sqrt[3]{5} + \sqrt{3} \\ 4\sqrt[3]{5} - 2\sqrt{3} \\ \hline 7\sqrt[3]{5} - \sqrt{3} = \text{сумм.} \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{r} 3a\sqrt{b} + 2\sqrt{3} - 7\sqrt[3]{c} \\ -2a\sqrt{b} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{c} \\ 7a\sqrt{b} + 4\sqrt{3} - \sqrt[3]{c} \\ \hline 8a\sqrt{b} + \sqrt{3} - 5\sqrt[3]{c} \end{array}$$

Примѣръ IV.

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}a} + \frac{5}{3}a\sqrt{7b} + \frac{4}{3}c\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \frac{6}{5}\sqrt{\frac{1}{2}a} - 3\sqrt{7a^2b} + \frac{5}{2}c\sqrt{\frac{4}{27}} \\ \hline \frac{28}{15}\sqrt{\frac{1}{2}a} - \frac{4}{3}a\sqrt{7b} + 3c\sqrt{\frac{1}{3}} \quad *) \end{array}$$

О вычитанїи коренныхъ величинъ.

§ 112. *Задача.* Простую неизвлекомую величину вычесть изъ другой.

Рѣшен. Перемѣня знакъ вычитаемаго количества въ противной, припиши оное къ тому

*) Ибо величина $- 3\sqrt{7a^2b} = - 3a\sqrt{7b}$; по сему $\frac{5}{3}a\sqrt{7b} - 3a\sqrt{7b} = -\frac{4}{3}a\sqrt{7b}$; также и $\frac{5}{2}c\sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{5}{2}c\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{20}{6}c\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}c\sqrt{\frac{1}{3}}$, слѣдовательно $\frac{4}{3}c\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{5}{3}c\sqrt{\frac{1}{3}} = 3c\sqrt{\frac{1}{3}}$.

количеству, изъ котораго вычесть должно; получишь требуемую разность, *на примѣръ*: изъ коренной величины $\sqrt[3]{b}$ вычесть $\sqrt{c}$, разность будетъ $\sqrt[3]{b}-\sqrt{c}$. Равнымъ образомъ разность величинъ $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$, будетъ $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$; или по приведенiи къ одинакому коренному показателю, разность сихъ количествъ $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$ будетъ $\sqrt[6]{25}-\sqrt[6]{27}$. Ежели коренныя величины будутъ одинакiя, то предстоящее большаго количества вычти изъ предстоящаго меньшаго, какъ и простыхъ алгебраическихъ величинъ, *на примѣръ*: разность величинъ $3\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$, будетъ $3\sqrt{a}-\sqrt{a}=2\sqrt{a}$; но ежели должно будетъ изъ $5\sqrt{bc}$ вычесть величину $-2\sqrt{ab}$, то разность ихъ будетъ $5\sqrt{bc}+2\sqrt{ab}$.

Посредствомъ сихъ правилъ вычитаются и сложныя величины, перемѣняя знаки вычитаемаго количества въ противные, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{5}+5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}-2\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{2}-\sqrt[3]{5}+7\sqrt{3} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{r} 4a^2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[4]{c}-3\sqrt{5} \\ -3a^2\sqrt[3]{b}-2\sqrt[4]{c}+5\sqrt{5} \\ \hline 7a^2\sqrt[3]{b}+4\sqrt[4]{c}-8\sqrt{5}. \end{array}$$

При-

Примѣръ III.

$$\frac{5}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}c} + \frac{7}{3}\sqrt{cb^3} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}b}$$

$$\frac{3}{7}\sqrt{\frac{1}{6}a^2c} + \frac{2}{3}b\sqrt{cb} + 2\sqrt{\frac{1}{6}b}$$

$$\frac{32}{7}a\sqrt{\frac{1}{6}c} + \frac{5}{3}b\sqrt{bc} - 6\sqrt{\frac{1}{6}b}.$$

Здѣсь въ количествѣ, изъ котораго другое вычитается, $\frac{5}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}c} = \frac{5}{2}a\sqrt{\frac{4}{6}c} = \frac{10}{2}a\sqrt{\frac{1}{6}c} = 5a\sqrt{\frac{1}{6}c}$. $\frac{7}{3}\sqrt{cb^3} = \frac{7}{3}b\sqrt{cb}$; и $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}b} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{6}b} = \frac{12}{3}\sqrt{\frac{1}{6}b} = 4\sqrt{\frac{1}{6}b}$; а въ вычитаемомъ количествѣ $\frac{3}{7}\sqrt{\frac{1}{6}a^2c} = \frac{3}{7}a\sqrt{\frac{1}{6}c}$, по перемѣнѣ коихъ сдѣлано вычитаніе.

О умноженіи коренныхъ величинъ.

§ 113. *Задача.* Данную коренную величину умножить другою.

Рѣшен. I. Ежели данныя величины будутъ имѣть одинакихъ показателей корня, то умножь предстоящее одной величины на предстоящее другой, и количество находящееся подъ знакомъ первой величины, на количество другой; получишь требуемое произведеніе, на примѣръ: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; также $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$. и $a\sqrt[3]{b} \times c\sqrt[3]{d} = ac\sqrt[3]{bd}$. Произведеніе двухъ величинъ $2\sqrt{4} \times 3\sqrt{9} = 6\sqrt{36} = 6 \times 6 = 36$. Равнымъ образомъ $a\sqrt[5]{b^2} \times \sqrt[5]{c} = a\sqrt[5]{b^2c}$; и $a\sqrt[n]{p^m} \times c\sqrt[n]{q} \times d\sqrt[n]{y^3} = acd\sqrt[n]{p^m q y^3}$; и напослѣдокъ $\frac{2}{3}a\sqrt{c^3} \times \frac{3}{5}d\sqrt{b} = \frac{6}{15}ad\sqrt{c^3b} = \frac{2}{5}adc\sqrt{cb}$.

II. Когда коренные показатели будутъ разные; то приведя ихъ къ одному коренному показателю, и умноживъ одну величину другою, какъ въ первомъ случаѣ показано, получишь требуемое произведеніе, *на примѣръ*: $2a\sqrt[3]{b^2}$ умножить чрезъ $c\sqrt{d}$, по приведеніи коихъ къ одному коренному показателю будетъ $2a\sqrt[3]{b^2} = 2a\sqrt[6]{b^4}$, и $c\sqrt{d} = c\sqrt[6]{d^3}$. И такъ произведеніе $2a\sqrt[3]{b^2} \times c\sqrt[2]{d}$ будетъ $= 2a\sqrt[6]{b^4} \times c\sqrt[6]{d^3} = 2ac\sqrt[6]{b^4d^3}$. Произведеніе двухъ количествъ $2\sqrt{3}$, и $3\sqrt[3]{4}$, по приведеніи къ одному коренному показателю, будетъ $2\sqrt[6]{27} \times 3\sqrt[6]{16} = 6\sqrt[6]{432}$. Также $a\sqrt[r]{b^3} \times 2c\sqrt[t]{d^2} = a\sqrt[rt]{b^{3t}} \times 2c\sqrt[rt]{d^{2r}} = 2ac\sqrt[rt]{b^{3t}.d^{2r}}$.

§ 114. *Прибавлен.* Произведеніе невозможныхъ количествъ $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ будетъ $= -\sqrt{a^2} = -a$; ибо $-a$ есть квадратъ величины $\sqrt{-a}$ (§ 113). И такъ дабы не обманутся въ умноженіи невозможныхъ количествъ, *на примѣръ*: $\sqrt{-b}$ чрезъ $\sqrt{-1}$, гдѣ произведеніе будетъ $-\sqrt{b}$, то должно представить себѣ, что $\sqrt{-b} = \sqrt{-1.b} = \sqrt{-1}.\sqrt{b}$; посему $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} = -1.\sqrt{b} = -\sqrt{b}$; ибо $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ (§ 113). Также $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = -\sqrt{bc}$; ибо $\sqrt{-b} = \sqrt{-1.b} = \sqrt{-1}.\sqrt{b}$ и $\sqrt{-c} = \sqrt{-1.c} = \sqrt{-1}.\sqrt{c}$, посему $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{c}$

$=\sqrt{}$

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = -1\sqrt{bc} = -\sqrt{bc}$; которое по обыкновенному умноженію $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{bc}$ будетъ неправильное произведеніе.

§ 115 *Примѣчан.* Ежели коренную величину должно будетъ умножить цѣлымъ числомъ, то умножается одно только предстоящее цѣлымъ количествомъ, *на прим:* $a\sqrt{b^3} \times c = ac\sqrt{b^3}$; ибо коренная величина $a\sqrt{b^3}$ во столько разъ увеличивается, сколько количество c въ себѣ единицъ заключаетъ; также и $2\sqrt[3]{c} \times 3 = 6\sqrt[3]{c}$.

Помощію предписанныхъ предложеній умножаются и сложныя величины, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\begin{array}{l} 4 + 2\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \\ \hline 8 + 4\sqrt{2} \\ \quad - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{4} = -4 \\ \hline 8 - 4 = 4 \text{ произв.} \end{array}$$

Примѣръ II.

$$\begin{array}{l} 2a\sqrt{b} + c \\ 3a\sqrt{b} + 2c \\ \hline 6a^2b + 3ac\sqrt{b} \\ \quad + 4ac\sqrt{b} + 2c^2 \\ \hline 6a^2b + 7ac\sqrt{b} + 2c^2 \text{ произв.} \end{array}$$

Примѣръ III.

$$\begin{array}{l} 3a + \sqrt[2]{(2a + \sqrt{b})} \\ 2a - \sqrt[2]{(2a + \sqrt{b})} \\ \hline 6a^2 + 2a\sqrt[2]{(2a + \sqrt{b})} \end{array}$$

$$6a^2 + 2a\sqrt[2]{(2a+\sqrt{b})}$$
$$-3a\sqrt[2]{(2a+\sqrt{b})} - 2a - \sqrt{b}$$

$$6a^2 - \sqrt[2]{(2a+\sqrt{b})} - 2a - \sqrt{b}$$ произв.

Примѣръ IV.

$$2\sqrt{b} + 3c\sqrt{2} - 5\sqrt{ab}$$
$$3\sqrt{b} - 4c\sqrt{2} + 5\sqrt{ab}$$

$$6b + 9c\sqrt{2b} - 15b\sqrt{a}$$
$$-8c\sqrt{2b} - 24c^2 + 20c\sqrt{2ab}$$
$$+10b\sqrt{a} + 15c\sqrt{2ab} - 25ab$$

$$6b + c\sqrt{2b} - 5b\sqrt{a} + 35c\sqrt{2ab} - 24c^2 - 25ab$$

Примѣръ V.

$$\left.\begin{matrix} 2\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt[6]{9} + \sqrt[6]{8} \\ 2\sqrt{3} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{4} \end{matrix}\right\} (\S\ 107)$$

$$4\sqrt[6]{243} + 2\sqrt[6]{216} - 2\sqrt[6]{36} - \sqrt[6]{32}$$

Примѣръ VI.

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{2} + 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{4}{5}}$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$$

$$\tfrac{3}{4} + 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{2}{5}} - \tfrac{9}{4}\sqrt{6} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{\tfrac{3}{5}}$$ произв.

Примѣръ VII.

$$\sqrt{-2} + \sqrt{a}$$
$$\sqrt{-2} - \sqrt{a}$$

$$-2 + \sqrt{-2a}$$

Примѣръ VIII.

$$2a\sqrt{-1} + \sqrt{-b}$$
$$-2a\sqrt{-1} - \sqrt{-b}$$

$$4a^2 + 2a\sqrt{b}$$ *)

$-\sqrt{}$

*) Ибо $-2a \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-b} = -2a \times -\sqrt{b} = +2a\sqrt{b}$.

$$\begin{array}{ll} -\sqrt{-2a}-a & +2a\sqrt{b}+b \text{ *)} \\ \hline -2-a \text{ произ.} & 4a^2+4a\sqrt{b}+b \text{ произ.} \end{array}$$

О дѣленіи коренныхъ величинъ.

§ 116. *Задача.* Данную коренную величину раздѣлить на другую.

Рѣшен. I. Ежели данныя количества будутъ имѣть одинакихъ коренныхъ показателей, то раздѣля предстоящее дѣлимаго на предстоящее дѣлителя, и количество подъ знакомъ дѣлимаго на количество подъ знакомъ дѣлителя, получишь требуемое частное, *на примѣръ*: ежели величина $a\sqrt[3]{b}$ раздѣлится на $c\sqrt[3]{d}$, то частное будетъ $\frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{b}{d}}$; также $6\sqrt{12}$ раздѣленное на $3\sqrt{3}$ въ частномъ даетъ $\frac{6}{3}\sqrt{\frac{12}{3}} = 2\sqrt{4} = 4$. Отъ раздѣленія $4\sqrt{10}$ на $2\sqrt{5}$ въ частномъ будетъ $\frac{4}{2}\sqrt{\frac{10}{5}} = 2\sqrt{2}$; также и $a^2\sqrt{b^3}$ раздѣленное на $2a\sqrt{b}$ въ частномъ $\frac{1}{2}a\sqrt{b^2} = \frac{1}{2}ab$. Равнымъ образомъ и отъ раздѣленія $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}b}$ на $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}c}$ частное будетъ $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4b}{5c}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{5}bc}$. Также ежели $4b^2\sqrt{c}$ раздѣлится на $2b$, то частное будетъ $2b\sqrt{c}$; ибо $2b\sqrt{c} \times 2b = 4b^2\sqrt{c}$.

II. Естьли данныя величины будутъ имѣть разныхъ коренныхъ показателей, то приведя ихъ къ одинакому коренному показателю, раздѣли одну величину на другую, какъ въ первомъ рѣшеніи

---

*) Поелику $-\sqrt{-b} = -1.\sqrt{-b}$, по сей причинѣ $2a \times -1.\sqrt{b} \times \sqrt{-1} = -2a \times -1.\sqrt{b} = +2a\sqrt{b}$.

ніи показано, будешь имѣть частное количество, *на примѣръ*: величину $4\sqrt{b}$ раздѣлить на $2\sqrt[3]{c}$, то приведя ихъ къ одному коренному показателю $4\sqrt[6]{b^3}$, и $2\sqrt[6]{c^2}$, раздѣли одно на другое, частное будетъ $= 2\sqrt[6]{\frac{b^3}{c^2}}$. Также ежели $a\sqrt[m]{b}$ раздѣлится на $c\sqrt[n]{p}$, то по приведеніи къ одному коренному показателю $a\sqrt[mn]{b^n}$, и $c\sqrt[mn]{p^m}$ частное будетъ $= \frac{a}{c}\sqrt[mn]{\frac{b^n}{p^m}}$.

Помощію сихъ правилъ дѣлятся и сложныя величины, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

Примѣръ I.

$$\sqrt{6}+2\sqrt{2}\ \Big|\ \sqrt{48}+2\sqrt{16}-4\sqrt{18}-8\sqrt{6}\ \Big|\ \sqrt{8}-4\sqrt{3}\ \text{частн.}$$
$$\sqrt{48}+2\sqrt{16}$$
$$-4\sqrt{18}-8\sqrt{6}$$
$$-4\sqrt{18}-8\sqrt{6}$$

Примѣръ II.

$$2a+3c\sqrt{b^3})\,4a^2+2ac\sqrt{b^3}-6c^2b^3\,(2a-2c\sqrt{b^3},\ \text{част.}$$
$$4a^2+6ac\sqrt{b^3}$$
$$-4ac\sqrt{b^3}-6c^2b^3$$
$$-4ac\sqrt{b^3}-6c^2b^3$$

Примѣръ III.

$$2a\sqrt{-1}+\sqrt{-b})\,4a^2+4a\sqrt{b}+b\,(-2a\sqrt{-1}-\sqrt{-b},\ \text{частное.}$$
$$4a^2+2a\sqrt{b}$$
$$2a\sqrt{b}+b$$
$$2a\sqrt{b}+b$$

При-

Примѣръ IV.

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{5}b})\tfrac{1}{2}\sqrt{c}-2\sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}b}(\tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{5c}{b}}-3\sqrt{\tfrac{5}{3}b}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{c} \qquad \text{част.}$$

$$\overline{\quad -2\sqrt{\tfrac{1}{3}b^2} \quad}$$

$$-2\sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$$

$$\overline{\quad \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}b} \quad}$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}b}$$

Примѣчан. Хотя отъ раздѣленія $3+2\sqrt{2}$ на $1+\sqrt{2}$, частное будетъ $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, однакожъ оное сократить можно слѣдующимъ образомъ: умножъ числителя и знаменателя сего частнаго на $1-\sqrt{2}$, то есть знаменателемъ (перемѣня знакъ втораго члена въ противной), будетъ $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$; умножъ еще числителя и знаменателя на -1, будетъ $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}=\sqrt{2}+1$ $=\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Также ежели $8-5\sqrt{2}$ раздѣлится на $3-2\sqrt{2}$, то въ частномъ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ помножь числителя и знаменателя чрезъ $3+2\sqrt{2}$, будетъ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ $\times\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{9-8}=4+\sqrt{2}=$ частному $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$.

§ 117. *Задача.* Данную коренную величину возвысить въ какую нибудь степень.

Рѣшен. I. Для возвышенія коренной величины въ какую нибудь степень, должно показателя каждой

каждой величины, подъ знакомъ находящейся, умножить показателемъ предложенной степени, *на примѣръ*: $\sqrt[5]{a}$ возвысить въ пятую степень, будетъ $(\sqrt[5]{a})^5 = \sqrt[5]{a^5} = a$. Третья степень величины $\sqrt{bd}$, будетъ $\sqrt{b^3d^3} = b^{\frac{3}{2}}d^{\frac{3}{2}}$. Степень m величины $\sqrt[n]{a^r}$ будетъ $\sqrt[n]{a^{rm}}$; ибо $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$; но при возвышенiи сей послѣдней величины въ степень m, показатель $\frac{r}{n}$ умножается чрезъ m (§ 56. сл. 2), слѣдовательно степень m величины $a^{\frac{r}{n}}$ будетъ $a^{\frac{rm}{n}} = \sqrt[n]{a^{rm}}$.

II. Ежели коренная величина будетъ имѣть предъ собою предстоящее, то надлежитъ и оное возвысить въ предложенную степень; или прежде поставить оное подъ коренной знакъ (§ 108), а потомъ изображенное такимъ образомъ количество возвысить въ требуемую степень, какъ въ первомъ рѣшенiи показано, *на примѣръ*: $(a\sqrt[3]{c^2})^2 = a^2\sqrt[3]{c^4} = a^2c\sqrt[3]{c}$; или переставя предстоящее подъ коренной знакъ, будетъ $(a\sqrt[3]{c^2})^2 = (\sqrt[3]{a^3c^2})^2 = \sqrt[3]{a^6c^4} = a^2c\sqrt[3]{c}$. Также $(2\sqrt{4})^2 = 4\sqrt{16} = 4.4 = 16$; поелику вторая степень числа $4 = 16$. Изъ сего видно, что предстоящее a также и 2 можетъ быть переставлено подъ знакъ или прежде или послѣ дѣйствiя.

Слѣдств. Изъ сего видно, когда показатель требуемой степени равенъ показателю корня; то

то въ такомъ случаѣ отнимается только отъ данной виличины коренной знакъ, *на примѣръ*: третья степень величины $\sqrt[3]{b^2} = (\sqrt[3]{b^2})^3 = \sqrt[3]{b^6} = b^2$. Равнымъ образомъ четвертая степень величины $2\sqrt[4]{b^3} = (2\sqrt[4]{b^3})^4 = 16\sqrt[4]{b^{12}} = 16b^{\frac{12}{4}} = 16b^3$. Также степень n величины $a\sqrt[n]{b^2} = a^n\sqrt[n]{b^{2n}} = a^n b^{\frac{2n}{n}} = a^n b^2$.

§ 119. *Задача.* Изъ предложенной коренной величины извлечь корень какой нибудь степени.

Рѣшен. I. Для извлеченія какого нибудь корня изъ кореннаго количества, котораго предстоящее единица, умножь кореннаго показателя показателемъ извлеченія, получишь требуемой корень, *на примѣръ*: извлечь корень пятой степени изъ $1\sqrt[3]{a^{15}}$, то умноживъ кореннаго показателя чрезъ 5, будетъ $\sqrt[15]{a^{15}} = a = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{15}}}$; ибо $\sqrt[3]{a^{15}} = a^5$, а корень пятой степени изъ $a^5 = \sqrt[5]{a^5} = a^{\frac{5}{5}} = a$. По сей причинѣ корень второй степени изъ $\sqrt{a^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = \sqrt{\sqrt{a^2}}$ также корень степени n изъ $\sqrt[m]{a^r} = \sqrt[mn]{a^r}$.

II. Естьли у коренной величины предстоящее совершенная степень требуемаго корня, то сыскавъ изъ онаго желаемой корень, поставь его предъ произведенною по первому рѣшенію коренною

ною величиною, получишь искомой корень, *на примѣръ*: корень квадрата изъ $9\sqrt[3]{5}$ будетъ $=3\sqrt[6]{5}=\sqrt{9\sqrt[3]{5}}$. Также корень квадрата изъ $4\sqrt[3]{64}=2\sqrt[6]{64}=2\times2=4$; ибо $4\sqrt[3]{64}=4.4=16$, а квадратной корень сего числа $=\sqrt{16}=4$. Но ежели предстоящее совершеннаго корня въ себѣ не заключаетъ, то переставя оное подъ коренной знакъ, сдѣлай рѣшеніе по первому случаю, *на примѣръ*: корень квадрата изъ $3\sqrt[3]{2}$ то будетъ $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{27.2}=\sqrt[3]{54}$, коего квадратной корень $\sqrt{\sqrt[3]{54}}=\sqrt[6]{54}$. Также корень третьей степени изъ $a\sqrt{b^3}$ будетъ $=\sqrt[6]{a^2b^3}$, и прочая.

Примѣчаніе На § 118 и 119. Ежели потребно будетъ имѣть какую нибудь степень или корень изъ кореннаго количества, изображеннаго дробью, то съ числителемъ и знаменателемъ предстоящаго и съ количествомъ подъ знакомъ находящагося, надлежитъ производить подобныя дѣйствія, какія показаны были о цѣлыхъ числахъ.

О уравненіяхъ первой степени и о различныхъ рѣшеніяхъ сей степени вопросовъ.

§ 120. *Опредѣл.* Два какія нибудь равныя количества, соединенныя знакомъ $=$, называются *уравненіе*, *на примѣръ*: $8+2=10$ или $a+b=dx$. Количество, по лѣвую сторону знака написанное, именуется *первою частію*, а по правую сторону находящееся, *второю частію уравненія*.

Приба-

Прибавлен. Уравненіе есть дѣйствіе, чрезъ которое посредствомъ извѣстныхъ количествъ находится одна или нѣсколько неизвѣстныхъ величинъ, въ уравненіи заключающихся.

§ 121. *Опредѣл.* *Уравненіе первой степени* есть то, въ которомъ показатель неизвѣстной буквы = 1; естьлижъ показатель помянутой буквы = 2, такое уравненіе именуется *второй степени* и такъ далѣе.

§ 122. *Положен.* Извѣстныя количества въ уравненіяхъ означаются первыми азбучными буквами, a, b, c, d и проч.; а неизвѣстныя послѣдними u, x, y, и z, *на примѣръ*: въ уравненіяхъ $y + x = d + c$, $y = б + a$ (которыя первой степени), также $x^2 - x = a$, и $x^2 + y^2 = d$ (кои второй степени), неизвѣстныя количества суть x и y.

Главный предметъ уравненія состоитъ въ томъ, чтобы неизвѣстное количество, какъ бы оное смѣшано ни было съ извѣстными, находилось въ одной а всѣ извѣстныя величины въ другой части уравненія; чрезъ что уже неизвѣстное количество дѣйствительно и найдено будетъ.

Примѣчаніе. Неизвѣстныя количества сыскиваются чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени и чрезъ извлеченіе корней, какъ-то изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

I. Пусть будетъ уравненіе $x - a = b$, гдѣ a и b означаютъ извѣстныя величины, какія бы

онѣ ни были. Въ семъ уравненіи, придавъ къ обѣимъ частямъ количество a, получишь уравненіе $x = b + a$ (*Часть I* § 33), которое опредѣляетъ намъ величину буквы x.

II. Ежели $x+c=bd$, то вычти изъ обѣихъ частей уравненія количество c, будетъ $x=bd-c$ (*Часть I.* § 34.), что означаетъ величину x.

III Когда уравненіе будетъ $c-b-x=d-2x$: то придай къ обѣимъ частямъ сперва $2x$, будетъ $2x-x+c-b=d$, или $x+c-b=d$; потомъ придай b, выйдетъ $x+c=d+b$; наконецъ вычти изъ каждой части c, будетъ $x=d+b-c$.

§ 123. *Слѣдств.* Изъ сихъ примѣровъ выводится общее правило, что величины изъ одной части уравненія переставляются въ другую съ противными знаками, то есть $+$ перемѣняется въ $-$, а $-$ въ $+$, *на примѣръ*: въ уравненіи $2x-b=d-c+x$, неизвѣстная буква x найдется слѣдующимъ образомъ:

$$2x-b=d-c+x$$

придай $b=b$

будетъ $2x=b+d-c+x$

вычти $x=x$

останется, $2x-x=x=b+d-c$, гдѣ величина $-b$ переставлена изъ первой части уравненія въ другую съ противнымъ знакомъ, то есть $+b$; а количество $+x$ изъ второй части, перенесено въ первую со знакомъ $-x$. Сіе правило для сокращенія дѣйствія во всѣхъ уравненіяхъ соблюдать должно.

IV.

IV. Ежели уравненіе будетъ $\frac{x}{a}=b$, то неизвѣстная буква x найдется чрезъ умноженіе; ибо умноживъ обѣ части уравненія чрезъ a, получишь $x=ab$ (Часть I. § 35.)

V. Въ уравненіи $bx=d$ неизвѣстное количество x сыщется чрезъ дѣленіе; ибо раздѣля обѣ части уравненія на b, выйдетъ $x=\frac{d}{b}$ (Часть I. § 36.)

VI. Когда уравненіе будетъ $\sqrt[2]{x}=a+b$, то возвысь обѣ части уравненія во вторую степень, будетъ $\sqrt{x^2}=a^2+2ab+b^2$ (§ 117 и 59.) то есть $x=a^2+2ab+b^2$.

VII. Въ уравненіи $x^2=cd$ неизвѣстное количество x найдется, когда изъ обѣихъ частей уравненія извлечется квадратной корень, то есть $\sqrt{x^2}=\sqrt{cd}$, гдѣ будетъ $x=\sqrt{cd}$.

Помощію сихъ общихъ правилъ сыскивается во всякомъ уравненіи неизвѣстная буква, какъ изъ слѣдующихъ вопросовъ видно:

Задача. I. Въ данномъ уравненіи $ab+nx=a^2-cx-n^2+nx$ найти неизвѣстное количество x.

Рѣшен. Сперва перенеси неизвѣстныя количества въ первую часть, а извѣстныя въ другую съ противными знаками, получишь новое уравненіе $nx-nx+cx=a^2-n^2-ab$ (§ 123), по сокращеніи котораго будетъ $cx=a^2-n^2-ab$, которое раздѣля на c, найдется $x=\frac{aa-nn-ab}{c}$.

Примѣчан. Изъ сего явствуетъ, что ежели одинакїя и равныя величины будутъ находиться въ обѣхъ частяхъ уравненїя съ одинакими знаками, то онѣ одна другую уничтожаютъ, какъ здѣсь nx.

Задача. II. Въ уравненіи $ax - b = a^2 - cx - m$ сыскать неизвѣстную величину x.

Рѣшен. Перенеся количества изъ одной части въ другую, какъ и прежде, съ противными знаками, будетъ $ax + cx$, или $(a + c).x = a^2 + b - m$; въ которомъ по раздѣленіи обѣихъ частей на $a + c$, найдется $x = \frac{aa + b - m}{a + c}$.

Задача. III. Въ уравненіи $b = \frac{aaa}{x} + c^2 - n$ найти неизвѣстную величину x.

Рѣшен. Умножь обѣ части уравненїя чрезъ x, будетъ $bx = a^3 + c^2x - nx$, въ коемъ переставя величины изъ одной части въ другую съ противными знаками, выйдетъ $bx + nx - c^2x$ или $(b + n - c^2).x = a^3$, наконецъ раздѣля каждую часть уравненїя на $b + n - c^2$, найдется $x = \frac{aaa}{b + n - cc}$.

Задача. IV. Въ данномъ уравненіи $\frac{an - cc}{b} = \frac{nn + xm}{c}$ найти величину неизвѣстной буквы x.

Рѣшен. Умножь сперва обѣ части уравненїя на b, будетъ $an - c^2 = \frac{bnn + bmx}{c}$; потомъ умножь на c, выйдетъ $acn - c^3 = bn^2 + bmx$, *) въ которомъ

*) Или все равно, что первая часть умножится чрезъ c, а вторая чрезъ b.

торомъ по перенесенiи bn^2 въ первую часть съ противнымъ знакомъ, будетъ $acn-c^3-bn^2=bmx$, а по раздѣленiи на bm найдется $x=\frac{acn-ccc-bnn}{bm}$.

Задача V. Въ уравненiи $4x-\frac{6}{5}=3x+5$, сыскать неизвѣстную величину x.

Рѣшен. Наблюдая предписанныя правила, сей вопросъ рѣшить уже не трудно, какъ слѣдуетъ:

$$4x-\tfrac{6}{5}=3x+5.$$

Перест. велич. $4x-3x=5+\frac{6}{5}$, то есть $x=5+\frac{6}{5}$ $=6\frac{1}{5}$.

Задача. VI. Въ данномъ уравненiи $\frac{xx+ax-cx}{3}$ $=n^2x-bx^2-mx$ найти неизвѣстную величину x.

Рѣшен. Неизвѣстная величина x сыщется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{xx+ax-cx}{3}=n^2x-bx^2-mx.$$

умножь на $3=3$.

будетъ $x^2+ax-cx=3n^2x-3bx^2-3mx$.

раздѣли на $x=x$.

будетъ $x+a-c=3n^2-3bx-3m$.

$x+3bx$ или $(1+3b).x=3n^2+c-3m-a$.

по разд. на $1+3b$, будетъ $x=\frac{3nn+c-3m-a}{1+3b}$.

Задача VII. Въ уравненiи $ax-\frac{3bx}{2a}+2c=$ $3abc-\frac{5bcx}{d}$ найти неизвѣстную величину x.

Рѣшен. Сперва каждую часть уравненія приведи въ дробь, будетъ $\frac{2aax - 3bx + 4ac}{2a} = \frac{6abcd - 10bcx}{d}$, потомъ умножь первую часть уравненія чрезъ d, а вторую чрезъ $2a$, выйдетъ $2a^2dx - 3bdx + 4acd = 6a^2bcd - 10abcx$ (*Задача IV*), въ которомъ переставя величины изъ одной части въ другую съ противными знаками, будетъ $2a^2dx + 10abcx - 3bdx$, или $(2a^2d + 10abc - 3bd).x = 6a^2bcd - 4acd$, откуда найдется $x = \frac{6aabcd - 4acd}{2aad + 10abc - 3bd}$.

Задача. VIII. Въ данномъ уравненіи $2a\sqrt{(bx - x)} = a + b$ найти неизвѣстную величину x.

Рѣшен. Раздѣли сперва обѣ части уравненія на $2a$, будетъ $\sqrt[2]{(bx - x)} = \frac{a + b}{2a}$; потомъ возвысь каждую часть во вторую степень, выйдетъ $bx - x$, или $(b - 1).x = \frac{aa + 2ab + bb}{4aa}$; а по раздѣленіи на $b - 1$ найдется $x = \frac{aa + 2ab + bb}{4aa(b - 1)}$.

Задача IX. Найти два числа, коихъ сумма $= a$, а разность $= b$.

Рѣшен. Пусть большее число $= x$, то меньшее будетъ $= x - b$, и по обстоятельству вопроса должно быть $a = x + x - b = 2x - b$, въ которомъ перенеся величину $-b$ въ первую часть уравненія, будетъ $a + b = 2x$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ большое число $x = \frac{a + b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; потомъ вычти изъ сего большаго количества раз-

разность b, будетъ $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} =$ меньшему количеству. И такъ положимъ, что $a = 100$, $b = 30$, то большее число $x = \frac{100}{2} + \frac{30}{2} = 50 + 15 = 65$; а меньшее $= \frac{100}{2} - \frac{30}{2} = 50 - 15 = 35$.

Слѣдст. Изъ сего видно, что большее количество равно половинѣ суммы съ половиною разности, а меньшее равно половинѣ суммы безъ полуразности; слѣдственно ежели изъ большаго числа вычтется полсуммы, то останется половина разности, также и полсуммы безъ меньшаго равно той же половинѣ разности двухъ количествъ.

Задача. X. Сыскать число, къ которому ежели придано будетъ 56, то сумма будетъ втрое больше искомаго числа.

Рѣшен. Положимъ, искомое число $= x$, и $56 = a$, то по условію вопроса будетъ $x + a = 3x$, въ которомъ вычтя изъ обѣихъ частей x, выйдетъ $a = 3x - x = 2x$, а по раздѣленіи на 2, найдется $x = \frac{a}{2} = \frac{56}{2} = 28$; къ которому ежели придастся 56, то будетъ $28 + 56 = 84 = 28 \times 3$.

Задача. XI. Сыскать два числа, коихъ разность 4, а разность ихъ квадратовъ 112.

Рѣшен. Положимъ $4 = a$, $112 = b$, меньшее число $= x$, то по силѣ вопроса, большее число будетъ $x + a$, и $(x + a)^2 - x^2 = b$, то есть $x^2 + 2ax + a^2 - x^2$ или $2ax + a^2 = b$; въ которомъ перенеся a^2 изъ первой части во вторую, будетъ $2ax = b - a^2$, а по раздѣленіи на $2a$, выдетъ $x = \frac{b - aa}{2a} = \frac{112 - 16}{8} = 12 =$ меньшему чи-

слу, къ коему ежели придастся разность a, то найдется большое число $= a + \frac{b-aa}{2a}$ $= \frac{2aa+b-aa}{2a} = \frac{aa+b}{2a} = \frac{16+112}{8} = 16$.

Задача XII. Число 50 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы $\frac{3}{4}$ одной съ $\frac{5}{6}$ другой составляли число 40.

Рѣшен. Положимъ $a=50$, $b=40$, меньшее число x, большее $= a-x$; то по обстоятельству вопроса будетъ $\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}(a-x) = b$, то есть $\frac{3x}{4} + \frac{5a-5x}{6} = b$, въ которомъ приведя первую часть къ одному знаменателю, будетъ $\frac{18x+20a-20x}{24} = b$, а умножа каждую часть чрезъ 24, выйдетъ $18x+20a-20x=24b$, или по сокращеніи $20a-2x=24b$, въ которомъ будетъ $20a-24b=2x$, а по раздѣленіи на 2, найдется $x=10a-12b=500-480=20$, и $50-20 = 30 =$ большему числу. И такъ $\frac{3}{4}\times 20 = 15$, и $\frac{5}{6}\times 30 = 25$, коихъ сумма $=40$.

Задача XIII. Три человѣка вообще получили 112 рубл. изъ коихъ второй получилъ 8 рубл. больше перваго, а третій столько, сколько досталось первому и второму; спрашивается, сколько каждой изъ нихъ получилъ.

Рѣшен. Пусть первой получилъ x рубл. то второму досталось $x+8$, а третьему $x+x+8=2x+8$, коихъ сумма вмѣстѣ взятая должна быть $=112$; по сему вычти изъ обѣхъ частей

x	стей 16, останется $4x=112$
$x+8$	$-16=96$, а по раздѣленіи ка-
$2x+8$	ждой части на 4, найдется x
$4x+16=112.$	$=24$. И такЪ первой получилЪ

24, второй $24+8=32$, третій $24+32=56$, коихЪ сумма $=112$.

Задача. XIV. Неизвѣстное число КозаковЪ получили вЪ добычу нѣкоторое число лошадей; но когда каждой изЪ нихЪ взялЪ по 2 лошади, то осталось 3 лошади; а когда начали брать по 3 лошади, тогда не достало 8 лошадей: спрашивается число КозаковЪ и число лошадей.

Рѣшен. Положим Ъ число КозаковЪ $=x$, то по обстоятельству вопроса, будетЪ $2x+3=$ числу лошад.; также и $3x-8=$ томужЪ числу; по сему $3x-8=2x+3$, вЪ которомЪ уравненіи по предписаннымЪ правиламЪ найдется x какЪ слѣдуетЪ:

$$3x-8=2x+3$$

$3x-2x=x=3+8=11=$ числу КозаковЪ а наконецЪ $2x+3=2.11+3=25=$ числу лошадей.

Задача. XV. ПетрЪ, ИванЪ и ЯковЪ имѣютЪ неизвѣстное число денегЪ; ПетрЪ сЪ ИваномЪ вмѣстѣ 40 рубл. ПетрЪ сЪ ЯковомЪ 80 рубл. ИванЪ сЪ ЯковомЪ 60 руб.: спраш. число денегЪ каждаго.

Рѣшен. ПоложимЪ общую сумму денегЪ всѣхЪ трехЪ человѣкЪ x, то ежели изЪ сей суммы вычесть $40=a$, останется $x-a$ деньги Якова, а естьли изЪ x вычесть $80=b$, то остатокЪ $x-b$ будетЪ число ИвановыхЪ денегЪ; будежЪ

изъ x вычтется $60 = c$, то $x - c$, будетъ число Петровыхъ денегъ, и три сіи числа должны быть равны суммѣ всѣхъ денегъ x; по сей причинѣ произойдетъ слѣдующее уравненіе: $(x-a) + (x-b) + (x-c) = x$ или $x-a+x-b+x-c=x$, въ которомъ $3x-a-b-c=x$; а по перенесеніи извѣстныхъ количествъ въ другую часть уравненія, будетъ $3x=x+a+b+c$; по отнятіижъ x, будетъ $2x = a+b+c$, въ которомъ раздѣля каждую часть на 2, найдется $x = \frac{a+b+c}{2} = \frac{40+80+60}{2} = \frac{180}{2} = 90$; откуду найдется $x - a = 90 - 40 = 50 =$ числу денегъ Якова, $x - b = 90 - 80 = 10 =$ числу Ивановыхъ денегъ, и наконецъ $x - c = 90 - 60 = 30$, число денегъ Петровыхъ.

Задача XVI. Нѣкто 5500 рублей своего имѣнія приказалъ послѣ смерти раздѣлить четыремъ свойственникамъ A, B, C и D такъ, чтобы B взялъ вдвое больше A, C столько, сколько A и B; а D столько, сколько C и B; спраш. по скольку каждому достанется.

Рѣшен. Положимъ A получитъ x рубл. то по обстоятельствамъ вопроса, B возметъ $2x$, C достанется $x+2x=3x$, а D получитъ $2x+3x=5x$, коихъ общая сумма $x+2x+3x+5x=(5500)=a$, или $11x=a$, гдѣ по раздѣленіи обѣихъ частей на 11, найдется $x=\frac{a}{11}=\frac{5500}{11}=500=$ числу денегъ A, B получитъ $2x=500\times2=1000$, $C=3x=500\times3=1500$, а D достанется $5x=500\times5=2500$.

Зада-

Задача XVII. А и В начали играть въ карты съ неизвѣстною суммою денегъ, изъ коихъ у каждаго было поровну; а послѣ игры нашлось, что А выигралъ 20 рублей, а у В осталось въ половину меньше А; спрашивается сколько у каждаго сначала было.

Рѣшен. Положимъ, что каждой сначала имѣлъ x рубл. но какъ А выигралъ 20 рублей, то у него послѣ игры будетъ $x+20$, а В будетъ имѣть половину онаго то есть $\frac{x}{2}+10$, которое ежели вычтется изъ $2x$, то есть изъ общей суммы денегъ, то будетъ остатокъ $2x-\frac{x}{2}-10=x+20$; откуда найдется $3x-20=2x+40$, а по переставкѣ величинъ, выйдетъ $x=60=$ числу денегъ каждаго. И такъ послѣ игры А имѣлъ $60+20=80$; а у В осталось 40 рублей.

Задача. XVIII. Число 5 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы частное отъ раздѣленія большей части на меньшую было тоже 5.

Рѣшен. Пусть $5=a$, x большая часть и $a-x$ меньшая: то по силѣ вопроса будетъ $\frac{x}{a-x}=a$, а по умноженіи на $a-x$ будетъ $x=(a-x).a=a^2-ax$; придай ко обѣимъ частямъ уравненія ax, будетъ $x+ax=a^2$ или $(1+a).x=a^2$, въ которомъ найдется $x=\frac{aa}{1+a}$. Вычти сіе количество изъ a, останется $a-\frac{aa}{1+a}=\frac{aa+a-aa}{1+a}=\frac{a}{1+a}$, и такъ первая часть $x=\frac{25}{6}$, вторая $=\frac{5}{6}$.

За-

Задача. XIX. Сыскать число, котораго двойная сумма съ 24 тѣмъ превосходитъ число 80, чѣмъ искомое число меньше 100.

Рѣшен. Положи искомое число $= x$, $24 = a$, $80 = b$ и $100 = c$: то по обстоятельству вопроса, будетъ $2x + a - b = c - x$, въ которомъ по перенесеніи величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $3x = c + b - a$, а по раздѣленіи на 3, найдется $x = \frac{c + b - a}{3} = \frac{100 + 80 - 24}{3}$ $= 52$. И такъ $52 \times 2 + 24 - 80 = 100 - 52 =$ 48.

Задача. XX. Число 75 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы трижды взятая большая часть, была 15 ю меньше другой части семь разъ взятой.

Рѣшен. Пусть будетъ $75 = a$, $15 = b$, большее число x, то меньшая часть будетъ $= a - x$. И такъ по условію вопроса, будетъ $3x + b = (a - x) \times 7 = 7a - 7x$, въ которомъ переставя величины изъ одной части въ другую съ противными знаками, выйдетъ $3x + 7x$, или $10x = 7a - b$, а по раздѣленіи на 10, найдется $x = \frac{7a - b}{10} = \frac{7 \times 75 - 15}{10} = \frac{510}{10} = 51 =$ большей части, и $a - x = 75 - 51 = 24$ меньш.

Задача. XXI. Нѣкто имѣетъ у себя столько денегъ, что половина, одна треть и четверть его денегъ 10 ю рублями больше всѣхъ его денегъ; спраш. число денегъ.

Рѣшен. Положимъ, искомое число денегъ $= x$: то по обстоятельствамъ вопроса выйдетъ слѣдующее уравненіе :

$\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 10$

$\frac{13x}{12} = x + 10$ по сложенiи членовъ

$13x = 12x + 120$ по умноженiи на 12.

$13x - 12x$, или $x = 120$.

И такъ $120 \times \frac{1}{2} = 60$, $120 \times \frac{1}{3} = 40$, и $120 \times \frac{1}{4} = 30$, коихъ сумма 130, будетъ 10 ю больше 120.

Задача. XXII. Нѣкто, будучи въ дорогѣ, употребилъ въ первую недѣлю $\frac{1}{3}$ своихъ денегъ, во вторую $\frac{1}{4}$, въ третью $\frac{1}{5}$, а по прiѣздѣ въ Москву нашлось остальныхъ 26 рублей; спрашивается число его денегъ, сколько сначала имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ искомое число денегъ $= x$, $26 = a$, то по обстоятельствамъ вопроса будетъ слѣдующее уравненiе:

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + a = x$.

$\frac{47x}{60} + a = x$ по сложенiи членовъ

$47x + 60a = 60x$ по умнож. на 60

$60a = 60x - 47x = 13x$, по переставкѣ велич.

$\frac{60a}{13} = x = \frac{60 \times 26}{13} = 120$ искомое число.

Задача. XXIII. Нѣкто, примѣчая высоту башни, нашолъ, что $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{5}$ оной закрывается стоящимъ предъ нею домомъ, а сверьхъ онаго возвышается на 32 фута; спрашивается высота всѣй бащни.

Рѣ-

Рѣшен. Пусть будетъ высота башни $= x$, $32 = a$: то по обстоятельствамъ вопроса будетъ $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x + a = x$, или $\frac{13}{15}x + a = x$; умножъ каждую часть уравненія чрезъ 15, будетъ $13x + 15a = 15x$, а вычтя $13x$, выйдетъ $15a = 2x$, гдѣ $\frac{15a}{2} = x = \frac{15 \times 32}{2} = 240 =$ высотѣ башни.

Задача. XXIV. Одинъ полководецъ, проигравши баталію, нашелъ, что половина всей арміи съ 3600 человѣкъ побита, восьмая часть съ 600 человѣкъ ранены, а оставшаяся пятая часть досталась плѣнными и бѣжавшими; спрашивается число людей всего войска.

Рѣшен. Положимъ будетъ число людей всего войска x, $3600 = a$, $600 = b$: то по обстоятельствамъ вопроса, будетъ $\frac{x}{2} + a + \frac{x}{8} + b + \frac{x}{5} = x$, или $\frac{20x + 5x + 8x}{40} + a + b = x$, въ которомъ по сложеніи членовъ выйдетъ $\frac{33x}{40} + a + b = x$; по умноженіи на 40, будетъ $33x + 40a + 40b = 40x$; вычти $33x$, останется $40a + 40b = 7x$, а по разделеніи на 7 найдется $x = \frac{40a + 40b}{7} = \frac{40 \times 3600 + 40 \times 600}{7} = 24000$, число людей всей арміи.

Задача. XXV. Дочь спрашивала отца о числѣ своихъ лѣтъ, ей отвѣтствовано: за 4 года предъ симъ лѣта твои составляли $\frac{1}{3}$ настоящихъ моихъ лѣтъ, а теперь твои лѣта равняются $\frac{2}{5}$ моихъ лѣтъ; спраш лѣта каждаго.

Рѣ-

Рѣшен. Пусть число лѣтъ отцу $= x$, то лѣта дочери будутъ $\frac{1}{3}x + 4 = \frac{2}{5}x$, или $\frac{x+12}{3} = \frac{2x}{5}$, въ которомъ выдетъ $5x + 60 = 6x$; а вычтя изъ обѣихъ частей уравненія $5x$, останется $60 = x =$ лѣтамъ отца, $\frac{2}{5}x = \frac{2}{5} \times 60 = 24$, лѣта дочери.

Задача. XXVI. A, B, C, D и E получили неизвѣстную сумму награжденія, изъ коего B взялъ 100 рублей меньше, нежели A; C 160 рубл. больше, нежели B; D 50 рублей меньше C, и E 150 рубл. больше D, и притомъ E досталось столько, сколько A и B; спрашивается количество награжденія, и по скольку каждому досталось.

Рѣшен. По предъидущимъ правиламъ найдется, что A получилъ 260, B получилъ $= 160$, C досталось $= 320$, D взялъ $= 270$, E получилъ $= 420$; по сему число награжденія $260 + 160 + 320 + 270 + 420 = 1430$ рубл.

Задача. XXVII. Число 60 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы превосходство 64 надъ большею частію равно было удвоенному превосходству 38 надъ меньшею частію.

Рѣшен. Положимъ $a = 60$, $b = 64$, $38 = c$, большая часть $= x$, меньшая будетъ $a - x$. И такъ по обстоятельству вопроса, будетъ $b - x = (c - a + x) \times 2 = 2c - 2a + 2x$, въ которомъ по перенесеніи членовъ, выйдетъ $b - 2c + 2a = 2x + x = 3x$, а поразделеніи на 3, найдется $x = \frac{b - 2c + 2a}{3} = \frac{64 + 120 - 76}{3} = 36 =$ боль-

шей части, и $60 - 36 = 24 =$ меньшей части.

Задача. XXVIII. Нѣкто, будучи 74 лѣтъ вопрошенъ былъ, давно ли въ отставкѣ? на вопросъ отвѣтствовано: $\frac{2}{5}$ моихъ лѣтъ до отставки равняются $\frac{3}{5}$ лѣтъ послѣ отставки; спрашивается какихъ лѣтъ отставленъ.

Рѣшен. Положимъ во время отставки было x лѣтъ, и $74 = a$, то послѣ отставки будетъ $a - x$. И такъ по силѣ вопроса $\frac{2}{5}x = \frac{3}{5}(a - x)$ $= \frac{3a - 3x}{5}$, въ которомъ по изключеніи знаменателей, выйдетъ $10x = 27a - 27x$, а придавъ къ обѣимъ частямъ $27x$, будетъ $10x + 27x$ или $37x = 27a$, откуда найдется $x = \frac{27a}{37} = 54$ искомыя лѣта, и $74 - 54 = 20$, число лѣтъ послѣ отставки. И такъ $54 \times \frac{2}{9} = 12$, также и $20 \times \frac{3}{5} = 12$.

Задача. XXIX. На вопросъ, которой часъ? отвѣтствовано, $\frac{2}{5}$ прошлыхъ часовъ отъ полудни до сего времени, равны $\frac{2}{3}$ остальныхъ до полуночи; спраш. сколько тогда часовъ было.

Рѣшен. Пусть въ то время прошлыхъ часовъ отъ полудни было x, то остальныхъ до полуночи будетъ $12 - x$. И такъ по обстоятельству вопроса, будетъ $\frac{2}{5}x = (12 - x).\frac{2}{3} = \frac{24 - 2x}{3}$, гдѣ по изключеніи знаменателей, будетъ $6x = 120 - 10x$, а по перенесеніи $10x$ въ первую часть уравненія, выйдетъ $6x + 10x$ или $16x = 120$, откуда найдется $x = \frac{120}{16} = 7\frac{1}{2}$ часовъ.

За-

Задача. XXX. Веселый Французъ, пришедъ въ трактиръ съ неизвѣстною суммою своего богатства, занялъ у содержателя столько денегъ, сколько у себя имѣлъ; изъ сей суммы издержавъ 1 рубль, съ остаткомъ пришелъ въ другой трактиръ, гдѣ опять занявши столько, сколко имѣлъ, издержалъ въономъ также 1 рубль; потомъ пришедъ въ третій и четвертой трактиръ учинилъ тоже, наконецъ по выходѣ изъ четвертаго трактира не имѣлъ ничего; спраш. количество его денегъ.

Рѣшен. Пусть число денегъ будетъ x рубл. то по силѣ вопроса будетъ въ первомъ трактирѣ $2x$, а по издержкѣ 1 рубля останется $2x-1$; въ другомъ трактирѣ будетъ у него $(2x-1).2 = 4x-2$, а послѣ проигрыша одного рубля останется, $4x-2-1 = 4x-3$; въ третьемъ трактирѣ будетъ имѣть $(4x-3).2 = 8x-6$, послѣжъ проигрыша останется $8x-6-1 = 8x-7$; въ четвертомъ трактирѣ съ займомъ, будетъ у сего весельчака $(8x-7).2 = 16x-14$, а по издержкѣ одного рубля останется $16x-14-1 = 16x-15 = 0$; въ которомъ ежели величина 15 перенесется въ другую часть уравненія съ противнымъ знакомъ, то выйдетъ $16x = 15$, а по раздѣленіи на 16, найдется $x = \frac{15}{16}$ рубл. $= \frac{15}{16} \times 100 = \frac{1500}{16} = 93\frac{3}{4}$ коп. число денегъ.

Задача. XXXI. Нѣкто на вопросъ, сколько имѣетъ денегъ? отвѣчалъ, втрое больше, нежели проигралъ; а когда вопрошенъ былъ о числѣ проигрыша, то сказалъ: ежели проигрышъ мой умножить на $\frac{1}{4}$ остальныхъ денегъ, то выйдетъ

то число, сколько сначала имѣлъ; спрашивается число настоящихъ денегъ.

Рѣшен. Въ семъ вопросѣ найдется число настоящихъ денегъ $= 24$ руб. по сему $\frac{24}{3} = 8 =$ проигрышу, и $8 \times \frac{24}{6} = 32 =$ числу ден. сначала.

Задача. XXXII. Въ нѣкоторомъ войскѣ считается 100,000 человѣкъ, въ томъ числѣ столько егерей, что половина ихъ съ третїею частїю прочаго войска составляютъ 35000 человѣкъ; спраш. число егерей.

Рѣшен. Положимъ $a = 100000$, $b = 35000$, число егерей x; то по обстоятельству вопроса будетъ прочаго войска $a - x$, и такъ $\frac{x}{2} + \frac{a-x}{3} = b$, въ которомъ по изключенїи знаменателей будетъ $3x + 2a - 2x = 6b$, то есть $x + 2a = 6b$, а по перенесенїи членовъ изъ одной части въ другую, найдется $x = 6b - 2a = 35000 \times 6 - 200000 = 10000 =$ числу егерей.

Задача. XXXIII. Найти два числа, изъ которыхъ одно втрое больше другаго, а сумма ихъ квадратовъ въ пять разъ больше суммы ихъ.

Рѣшен. Положимъ, меньшее число $= x$, большее будетъ $= 3x$, сумма ихъ равна $4x$; то по силѣ вопроса будетъ $x^2 + 9x^2 = 4x \times 5 = 20x$, то есть $10x^2 = 20x$, а по раздѣленїи на $10x$ найдется $x = 2 =$ меньшему, по сему большее будетъ $= 3x = 6$.

Задача. XXXIV. Въ пороховой составъ положено селитры половина всего состава съ 6 пудами, сѣры одна треть безъ пяти пудъ, уголья четверть всего состава безъ трехъ пудъ;

пудъ; спраш. сколько каждаго вещества въ составъ положено.

Рѣшен. По предъидущимъ правиламъ найдется вѣсу всего состава; $=24$ пуда, вѣсъ селитры $=\frac{24}{2}+6=18$, вѣсъ сѣры $\frac{24}{3}-5=3$, вѣсъ уголья $\frac{24}{4}-3=3$ пуда.

Задача. XXXV. Частный дворянинъ правосудіемъ принужденъ былъ заплатить богатому вельможѣ за потраву пустополья половину своего стада коней съ полуконемъ; въ другой разъ взято у него половина остатка съ полулошадью, въ третій разъ присуждено также заплатить половину остатка съ половиною коня, и наконецъ въ четвертый разъ учиня то же, оставили бѣдняка только съ 5 ю лошадьми; спрашивается сколько дворянинъ коней имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ число коней въ табунѣ было x, то по обстоятельствамъ вопроса останется у дворянина послѣ перваго грабежа $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$; послѣ втораго насилія остатокъ будетъ $(\frac{x-1}{2}):2-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x-1-2}{4}=\frac{x-3}{4}$; послѣ третьяго взятья останется $(\frac{x-3}{4}):2-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}$ $=\frac{x-3-4}{8}=\frac{x-7}{8}$; наконецъ послѣ четвертаго посѣщенія осталось $(\frac{x-7}{8}):2-\frac{1}{2}=\frac{x-7-8}{16}=\frac{x-15}{16}$, которое равно 5, отъ чего произойдетъ уравненіе $\frac{x-15}{16}=5$, по умноженіижъ чрезъ 16 будетъ $x-15=80$, а перенеся 15 въ другую часть

уравненія найдется $x = 95 =$ числу всѣхъ коней.

Задача XXXVI. Нѣкто оставилъ по смерти своей нѣсколько дѣтей и имѣніе, которое дѣти дѣлятъ между собою такъ: первой получаетъ 1000 рублей и $\frac{1}{7}$ часть остатка, второй послѣ перваго 2000 рублей и $\frac{1}{7}$ часть остатка; потомъ беретъ третей 3000 рублей и еще седьмую часть остальнаго, и такъ далѣе одинъ послѣ другаго; а по раздѣлу явилось у каждаго по ровну; спрашивается сколь велико было имѣніе, число дѣтей, и сколько каждому досталось.

Рѣшен. Положимъ $a = 1000$, а все имѣніе $= x$, то по обстоятельствамъ вопроса, первой получилъ $a + \frac{x-a}{7} = \frac{7a+x-a}{7} = \frac{6a+x}{7}$. Остатокъ послѣ взятья перваго будетъ $x - \frac{6a+x}{7} = \frac{7x-6a-x}{7}$ $= \frac{6x-6a}{7}$, а когда изъ сего числа второй возметъ $2000 = 2a$, то останется $\frac{6x-6a}{7} - 2a$ $= \frac{6x-6a-14a}{7} = \frac{6x-20a}{7}$; седьмая часть сего числа есть $\frac{6x-20a}{7 \times 7} = \frac{6x-20a}{49}$; и такъ второй получаетъ $2a + \frac{6x-20a}{49} = \frac{98a+6x-20a}{49} = \frac{78a+6x}{49}$, которое по силѣ вопроса должно быть равно количеству денегъ перваго, то есть $\frac{6a+x}{7} = \frac{78a+6x}{49}$, въ семъ уравненіи умножъ числителя и знаменателя первой части чрезъ 7, будетъ $\frac{42a+7x}{49}$

$=$

$= \frac{78a+6x}{49}$, а по исключенiи знаменателей выйдетЪ $42a+7x=78a+6x$, вЪ которомЪ по перенесенiи членовЪ найдется $7x-6x=78a-42a$ или $x=36a=36000=$ числу рублей имѣнiя; числожЪ денегЪ каждаго $\frac{6a+x}{7}=\frac{6000+36000}{7}=\frac{42000}{7}$ $=6000$, и $\frac{36000}{6000}=6$ числу дѣтей.

О двухЪ и больше уравненiяхЪ первой степени.

§ 124. Не рѣдко случается, что величину двухЪ или больше неизвѣстныхЪ количествЪ, означенныхЪ буквами x, y, z и проч. находить должно; тогда при сыскиванiи такихЪ количествЪ надлежитЪ быть столько уравненiй, сколько неизвѣстныхЪ количествЪ вЪ вопросѣ предложено будетЪ, изЪ коихЪ во всякомЪ уравненiи каждое изЪ неизвѣстныхЪ количествЪ поставлено быть должно.

Задача. I. ВЪ данныхЪ двухЪ уравненiяхЪ $x+y=a$, и $x-2y=b$, сыскать величины двухЪ неизвѣстныхЪ количествЪ x и y.

Рѣшен. ИзЪ каждаго даннаго уравненiя сыщи прежде неизвѣстную величину x; потомЪ найденныя равныя количества x, соединя знакомЪ равенства, получишь одно уравненiе, вЪ которомЪ одна только неизвѣстная буква y находиться будетЪ; потомЪ изЪ сего уравненiя сыскавши по предписаннымЪ правиламЪ величину буквы y, поставь найденную величину вЪ ка-

комъ нибудь изъ первыхъ уравненій вмѣсто y, получишь величину буквы x, какъ слѣдуетъ:

$$\frac{x+y=a}{x=a-y} \quad \text{также} \quad \frac{x-2y=b}{x=b+2y}$$

Соединя сіи равныя количества вмѣстѣ знакомъ равенства будетъ

$$\frac{b+2y=a-y}{2y+y=3y=a-b} \text{ по переносѣ величинъ.}$$

$$3: \overline{\quad y=\frac{a-b}{3} \quad}$$

Сіе найденное количество, поставь въ первомъ уравненіи $x=a-y$ вмѣсто y, найдется $x=a-y=a-(\frac{a-b}{3})=\frac{3a-a+b}{3}=\frac{2a+b}{3}$.

или

Сыскавъ изъ втораго уравненія величину $x=b+2y$, поставь оную въ первомъ уравненіи $x+y=a$ вмѣсто x, получишь $b+2y+y=a$ или $b+3y=a$, гдѣ переставя букву b, будетъ $3y=a-b$, а по раздѣленіи на 3 найдется $y=\frac{a-b}{3}$. Ежели сія величина поставится вмѣсто y въ какомъ нибудь изъ двухъ уравненій, на примѣръ, въ первомъ, то будетъ $x+y=x+\frac{a-b}{3}=a$, въ коемъ перенеся $\frac{a-b}{3}$ въ другую часть уравненія, сыщется $x=a-(\frac{a-b}{3})=\frac{3a-a+b}{3}=\frac{2a+b}{3}$ тоже, что и прежде.

Задача. II. Въ данныхъ уравненіяхъ $ax+by=e$, и $dy-ex=n$ найти неизвѣстныя величины x и y.

Рѣше-

Рѣшен. Сперва сыщи изъ каждаго уравненія величину буквы x, а потомъ составя изъ найденныхъ равныхъ количествъ одно уравненіе, сыщи величину второй буквы y, по которой опредѣлится величина x какъ слѣдуетъ:

$$1)\ ax+by=e \qquad\qquad 11)\ dy-ex=n$$

$$ax=e-by \qquad\qquad dy-n=ex$$

$$:a \qquad\qquad :e$$

$$x=\frac{e-by}{a} \qquad\qquad \frac{dy-n}{e}=x$$

Потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ следующее уравненіе $\frac{dy-n}{e}=\frac{e-by}{a}$, найдется величина y какъ слѣдуетъ.

$$\frac{dy-n}{e}=\frac{e-bu}{a}$$

$$ady-an=e^2-bey$$

$$ady+bey \text{ или } (ad+be)y=e^2+an$$

$$y=\frac{ee+an}{ad+be}$$

Поставь сіе количество во второмъ уравненіи $x=\frac{dy-n}{e}$ вмѣсто y, будетъ $x=(\frac{ee+an}{ad+be})\frac{d}{e}-\frac{n}{e}.=\frac{eed-adn}{ade+bee}-\frac{n}{e}$.

Задача III. Въ данныхъ уравненіяхъ $3x\sqrt{2}-2y=8$, и $2y\sqrt{3}+2x=10$, сыскать неизвѣстныя величины x и y.

Рѣшен. Сперва сыщи изъ каждаго уравненія величину x, а потомъ составя изъ найденныхъ равныхъ количествъ последнее уравненіе, сыщи

величину y, посредствомъ которой опредѣлится величина, x какъ слѣдуетъ:

$$3x\sqrt{2}-2y=8$$
$$3x\sqrt{2}=8+2y$$
$3\sqrt{2}$:
$$x=\frac{8+2y}{3\sqrt{2}}$$

$$2y\sqrt{3}+2x=10$$
$$2x=10-2y\sqrt{3}$$
2:
$$x=5-y\sqrt{3},\text{(A)}$$

Потомъ будетъ

$$\frac{2y+8}{3\sqrt{2}}=5-y\sqrt{3}$$
$$2y+8=15\sqrt{2}-3y\sqrt{6}$$
$$2y+3y\sqrt{6}=15\sqrt{2}-8$$ по переносѣ велич.

или $(2+3\sqrt{6})y=15\sqrt{2}-8$

$2+3\sqrt{6}$:
$$y=\frac{15\sqrt{2}-8}{2+3\sqrt{6}}$$

Наконецъ поставь сїе количество въ уравненїе (A) вмѣсто y, найдется $x=\frac{10+8\sqrt{3}}{2+3\sqrt{6}}$.

§ 125. *Прибавлен.* Ежели въ вопросѣ будутъ три неизвѣстныя величины, и столькожъ уравненій; то надлежитъ сперва изъ всѣхъ трехъ уравненій сыскать одну какую нибудь неизвѣстную величину; потомъ изъ трехъ найденныхъ равныхъ количествъ составя два уравненія, найти другую неизвѣстную величину, наконецъ сдѣлавъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ одно послѣднее уравненїе, должно сыскать третью неизвѣстную величину; посредствомъ которой и прочія неизвѣстныя количества легко уже найдены быть могутъ,

на

нъ примѣръ: пусть будутъ три слѣдующія уравненія, I) $3x+5y-4z=25$, II) $5x-2y+3z=46$. III) $3y+5z-x=62$; то сыщи каждаго изъ сихъ уравненій величину x, которая посредствомъ предъидущихъ правилъ найдется въ I) $x=\frac{25-5y+4z}{3}$; во II) $x=\frac{46+2y-3z}{5}$; въ III) $x=3y+5z-62$. Потомъ составя изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ два уравненія, какъ-то первое изъ I и II, второе изъ II и IIIго, сыщи неизвѣстную величину z, какъ изъ слѣдующаго видно:

Изъ I и II го

$$\frac{25-5y+4z}{3}=\frac{46+2y-3z}{5}$$

$125-25y+20z=138+6y-9z$ по изкл. знам.

$20z+9z=138-125+6y+25y$ по перен. вел.

$29z=13+31y$ по сокращеніи

29: ______

$$z=\frac{13+31y}{29}.\ (A)$$

Изъ II и III го.

$$3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$$

$15y+25z-310=46+2y-3z$ по умнож. на 5.

$25z+3z=46+310+2y-15y$. пересп. велич.

$28z=356-13y$

28: ______

$$z=\frac{356-13y}{28},\ (B)$$

Наконецъ изъ сихъ двухъ послѣднихъ равныхъ количествъ (A) и (B) составя одно уравненіе, найди величину y, какъ слѣдуетъ:

$$\frac{13+31y}{29}=\frac{356-13y}{28}$$

$$364+868y=10324-377y$$

$$868y+377y=10324-364$$

$$1245y=9960$$

$$y=\frac{9960}{1245}=8$$

И такъ поставя 8 въ уравненіи (B) вмѣсто y, найдется $z=\frac{356-13y}{28}=\frac{356-104}{28}=9$; поставя въ III изъ первыхъ уравненій 8 вмѣсто y, а 9 вмѣсто z, найдется $x=3y+5z-62=24+45-62=7$.

Задача IV. Въ уравненіяхъ $ax-bx=2c^2=xm=\frac{ybc}{a}$ и $yc=\frac{zzz}{p}$ найти неизвѣстныя величины.

Рѣшен. Сперва найди изъ уравненія $ax-bx=2c^2$ величину неизвѣстной буквы x, гдѣ $x=\frac{2cc}{a-b}$; потомъ поставя сіе найденное количество въ уравненіи $xm=\frac{ybc}{a}$ вмѣсто x, отъ чего произойдетъ уравненіе $\frac{2ccm}{a-b}=\frac{ybc}{a}$, въ коемъ величина y найдется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{2ccm}{a-b}=\frac{ybc}{a}$$

$$2accm=abcy-b^2cy$$

$$abc-b^2c:$$

$$\frac{2accm}{abc-bbc}=\frac{2acm}{ab-bb}=y.$$

На-

Наконецъ сію найденную величину y, поставь въ уравненіи $yc = \frac{zzz}{p}$ вмѣсто y, откуда произойдетъ уравненіе $\frac{2accm}{ab-b^2} = \frac{zzz}{p}$, въ которомъ по умноженіи обѣихъ частей уравненія чрезъ p будетъ $z^3 = \frac{2accmp}{ab-bb}$, а по извлеченіи кубическаго корня найдется $z = \sqrt[3]{\frac{2accmp}{ab-bb}}$.

§ 126. *Прибавлен.* Подобнымъ образомъ находятся и четыре неизвѣстныя величины изъ четырехъ уравненій, изъ коихъ также сперва сыскивается величина одной какой нибудь неизвѣстной буквы; а потомъ изъ найденныхъ четырехъ равныхъ количествъ составляются три уравненія, въ коихъ посредствомъ двухъ предъидущихъ предложеній изобрѣтаются три неизвѣстныя величины; а наконецъ чрезъ оныя сыскиваются третье и четвертое неизвѣстное количество, какъ то изъ ниже слѣдующихъ примѣровъ будетъ видно.

Задача. V. Найти два числа, коихъ сумма $= a$, а разность $= b$.

Рѣшен. I. Пусть будетъ большее количество x, меньшее y: то по условію вопроса будетъ I) $x+y=a$, II) $x-y=b$, изъ коихъ въ первомъ найдется $x=a-y$, во второмъ $x=b+y$, потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе $b+y=a-y$, въ которомъ по переставкѣ величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $y+y$ или $2y=a-b$, а по раздѣленіи на 2, найдется $y=\frac{a-b}{2}$ $=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=$ меньшему количеству; наконецъ поставя сію величину въ уравненіе $x=b+y$ вмѣсто

сто y, сыщется $x=b+\frac{a-b}{2}=\frac{2b+a-b}{2}=\frac{b+a}{2}$
$=\frac{b}{2}+\frac{a}{2}$.

Рѣшен. II. Сложа помянутыя уравненія вмѣстѣ, будетъ

$$\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \\ \hline 2x=a+b \\ 2: \hline \end{array}$$

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\text{больш. колич.}$$

Потомъ найдется изъ перваго уравненія $y=a-x=a-(\frac{a+b}{2})=\frac{2a-a-b}{2}=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ тоже, что и прежде.

Задача VI. Найти два числа, коихъ разность $=5$, также и частное отъ раздѣленія большаго на меньшее $=5$.

Рѣшен. Положимъ $a=5$, большее количество x а меньшее $=y$, то по обстоятельствамъ вопроса будетъ I) $x-y=a$, II) $\frac{x}{y}=a$; и такъ изъ перваго уравненія найдется $x=a+y$, а изъ втораго $x=ay$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $ay=a+y$, гдѣ переставя величину y изъ второй части уравненія въ первую, будетъ $ay-y=a$, или $(a-1)y=a$, а по раздѣленіи на $a-1$ найдется $y=\frac{a}{a-1}$; наконецъ поставя величину $\frac{a}{a-1}$ вмѣсто y, въ уравненіе $x=a+y$, или $x=ay$, сыщется $x=a\times\frac{a}{a-1}=\frac{aa}{a-1}$: слѣдственно $y=\frac{5}{4}$, а $x=\frac{25}{4}$.

При-

Примѣчан. Поелику буквою a означать можно всякое число; то изъ сего явствуетъ и вообще, что для сысканія двухъ чиселъ, коихъ бы разность и частное число отъ раздѣленія большаго на меньшее равны были одному какому нибудь предложенному числу, надлежитъ только для большаго числа квадратъ даннаго числа раздѣлить на предложенное число безъ единицы; а для изобрѣтенія меньшаго, раздѣлить данное число на тоже число безъ единицы.

Задача VII. Найти два числа, изъ коихъ ежели каждое умножится на 18, то бы произведеніе перваго было квадратъ, а произведеніе втораго его корень; а когда оба количества умножатся на 3, то бы первое произведеніе было кубъ, а второе его корень.

Рѣшен. Пусть будетъ $a=18$, $b=3$, большее количество $=x$, а меньшее $=y$: то по обстоятельствамъ вопроса будетъ I) $\sqrt{ax}=ay$, II) $\sqrt[3]{bx}=by$, изъ коихъ ежели каждую часть перваго уравненія возвысить во вторую степень, а втораго въ третью; то будетъ первое уравненіе $\sqrt{a^2x^2}=ax=a^2y^2$, а втораго $\sqrt[3]{b^3x^3}=bx$ $=b^3y^3$ (§77 и 78), гдѣ изъ перваго найдется $x=ay^2$, а изъ втораго $x=b^2y^3$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $b^2y^3=ay^2$, въ которомъ по раздѣленіи каждой части на b^2y^2 найдется $y=\frac{a}{bb}=\frac{18}{9}=2=$ меньшему числу, чрезъ которое найдется $x=ay^2=18.4=72$.

Задача VIII. Найти такую дробь, у которой ежели къ числителю придастся единица, то выйдетъ дробь $\frac{1}{3}$; а когда къ знаменателю придастся единица, то выйдетъ $\frac{1}{4}$.

Рѣшен.

Рѣшен. Пусть будетъ числитель искомой дроби x, а знаменатель y; то по вопросу выйдутъ слѣдующія уравненіи: I) $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}$, II) $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$, изъ коихъ посредствомъ предложенныхъ правилъ найдется величина x и y слѣдующимъ образомъ:

I) $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}$

$3x+3=y$

II) $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$

$4x=y+1$

$4x-1=y$

Потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $4x-1=3x+3$,

$4x-3x=3+1$.

откуда найдется $x=4$.

а $y=3x+3=12+3=15$. И такъ искомая дробь $\frac{x}{y}=\frac{4}{15}$, у которой придавъ къ числителю 1, будетъ $\frac{4+1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, а придавъ къ знаменателю 1, будетъ $\frac{4}{15+1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

Задача. IX. Два человѣка A и B имѣютъ по нѣскольку денегъ, такъ что ежели A дастъ B 5 рубл. то будетъ у обоихъ по ровну; а ежели B дастъ A 5 рубл., то A будетъ имѣть втрое больше, нежели останется у B; спраш. сколько каждой денегъ имѣетъ.

Рѣшен. Положимъ $5=a$, количество денегъ человѣка $A=x$, а $B=y$: то по силѣ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x-a=y+a$, $x+a=(y-a).3$, изъ коихъ въ каж-

домъ

домѣ уравненіи помощію предписанныхѣ правилѣ найдется величина x и y слѣдующимѣ образомѣ:

$$\text{I)}\ \underline{x-a=y+a} \qquad \text{II)}\ \underline{x+a=(y-a)3=3y-3a}$$

$$x=y+2a \qquad\qquad x=3y-4a$$

откуда произойдетѣ послѣднее уравненіе

$$\underline{3y-4a=y+2a}$$

$$\underline{3y-y=2a+4a}$$

или $2y=6a$

$$2:\ \overline{}$$

$$y=3a=15\ ;\ \text{а}\ x=y+2a=15+10=25.$$

Задача X. Увѣряютѣ, что Езопова голова была длиною 7 дюймовѣ, а ноги такѣ длинны, какѣ голова и половина туловища, тулувищежѣ равно длинѣ ногѣ сѣ головою; спрашив. ростѣ сего славнаго человѣка.

Рѣшен. Положимѣ $a=7$, длина ногѣ $=x$, а длина туловища $=y$; то по силѣ вопроса произойдутѣ слѣдующія уравненія: I) $x=a+\frac{y}{2}$; II) $y=x+a$, изѣ которыхѣ во второмѣ уравненіи будетѣ $y-a=x$. И такѣ составя изѣ перваго и послѣдняго равныхѣ количествѣ уравненіе $y-a=a+\frac{y}{2}$, умножѣ каждую часть на 2, выйдетѣ $2y-2a=2a+y$, вѣ которомѣ перенеся величины изѣ одной части вѣ другую, найдется $2y-y$ или $y=4a=28=$ длинѣ туловища, а длина ногѣ $x=a+\frac{y}{2}=21$; весѣ же ростѣ Езопа $=7+28+21=56$ дюйм. или 2 аршина.

За-

Задача XI. Найти два числа, коихъ бы сумма была вдвое ихъ разности, а произведеніе въ двенадцать разъ болѣе ихъ суммы.

Рѣшен. Положимъ большее число x, а меньшее y, то по обстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $(x - y) \times 2 = y + x$, II) $xy = (x + y) \times 12$, изъ коихъ въ первомъ уравненіи будетъ $2x - 2y = y + x$, а переставя величины изъ одной части въ другую, найдется $2x - x = y + 2y$, то есть $x = 3y$; изъ вторагожъ уравненія $xy = 12x + 12y$, въ которомъ вычтя $12x$, будетъ $xy - 12x = 12y$ или $(y-12).x = 12y$, а по раздѣленіи сихъ частей на $y-12$ найдется $x = \frac{12y}{y-12}$; потомъ составя изъ найденныхъ двухъ равныхъ количествъ x, послѣднее уравненіе $3y = \frac{12y}{y-12}$; умножь каждую часть на $y-12$ выдетъ $3y^2 - 36y = 12y$, въ которомъ будетъ $3y^2 = 12y + 36y = 48y$, а по раздѣленіи каждой части на $3y$, найдется $y = 16 =$ меньшему числу, а большее $= x = 3y = 16 \times 3 = 48$.

Задача XII. Нѣкто продаетъ двухъ коней съ двумя седлами, изъ коихъ одно стоитъ 48 рублей, а другое 3 рубли. За первую лошадь съ хорошимъ седломъ проситъ вдвое дороже, нежели другая стоитъ съ дешевымъ седломъ; а другую съ хорошимъ седломъ отдаетъ втрое дороже противъ первой съ дешевымъ седломъ; спрашивается цѣна каждаго коня.

Рѣшен. Положимъ $a = 48$, $b = 3$, цѣна перваго коня x, а другаго y рубл. то по силѣ

вопроса произойдутЪ слѣдующія уравненія: I) $x + a = (y + b).2 = 2y + 2b$, II) $y + a = (x + b).3 = 3x + 3b$; изЪ коихЪ посредствомЪ предЪидущихЪ правилЪ найдутся величины x и y, какЪ слѣдуетЪ:

$$\text{I)}\ \frac{x + a = 2y + 2b}{x = 2y + 2b - a} \qquad \text{II)}\ \frac{y + a = 3x + 3b}{y + a - 3b = 3x}$$

$$3{:}\ \frac{y + a - 3b}{3} = x$$

ПотомЪ составя изЪ сихЪ двухЪ равныхЪ количествЪ послѣднее уравненіе, найдется y, какЪ изЪ слѣдующаго видно:

$$2y + 2b - a = \frac{y + a - 3b}{3}$$

$$6y + 6b - 3a = y + a - 3b$$

$$6y - y = a + 3a - 3b - 6b$$

или $5y = 4a - 9b$

$$5{:}\ y = \frac{4a - 9b}{5} = \frac{192 - 27}{5} = 33$$ цѣна второму коню; Цѣнаж первaго $x = 2y + 2b - a = 24$.

Задача XIII. Пріѣзжей ФранцузЪ просилЪ на Рускаго солдата вЪ покражѣ всѣхЪ его денегЪ; ворЪ сказалЪ: правда, что я укралЪ его имѣніе; а какЪ спросили его о числѣ покраденныхЪ денегЪ, то онЪ отвѣчалЪ: ежели кЪ украденному мною числу денегЪ придать 10 рублей, то выйдетЪ мое годовое жалованье, а буде кЪ количеству его денегЪ придать 20 рублей, то выйдетЪ вдвое больше моего жалованья; спрашив. число денегЪ просителя и солдатскаго жалованья.

 Рѣшен.

Рѣшен. Пусть солдатъ укралъ x рубл. а жалованье его y рубл. и $10=a$, то по силѣ вопроса, будетъ первое уравненіе $x+a=y$, второе $x+2a=2y$; въ которомъ поставя $x+a$ вмѣсто y, будетъ $x+2a=(x+a).2=2x+2a$, гдѣ переставя величины изъ одной части уравненія въ другую, будетъ $2a-2a=2x-x$; а по сокращеніи найдется $x=0$, то есть солдату у Француза украсть было нечего, поелику онъ не имѣлъ ничего. Солдатскоежъ жалованье $y=x+a=0+10=10$ рубл.

Задача. XIV. Нѣсколько человѣкъ заплатили за наслѣгъ неизвѣстное число денегъ; но извѣстно только то, что ежели бы у нихъ было еще 3 человѣка, то бы каждой заплатилъ гривною меньше; а когда бы двухъ не доставало, то платилъ бы каждой гривною больше; спрашив. число людей и денегъ.

Рѣшен. Пусть 10 коп$=a$, число людей x, а каждой платилъ y, и такъ число заплаченныхъ денегъ будетъ$=xy$, и по условію вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $xy=(x+3)\times(y-a)=xy+3y-ax-3a$, II) $xy=(x-2)\times(y+a)=xy-2y+ax-2a$, изъ коихъ посредствомъ предъидущихъ правилъ найдутся x и y слѣдующимъ образомъ:

I) $xy=xy+3y-ax-3a$.

$xy-xy+ax+3a=3y$

т. е. $ax+3a=3y$

3:

$\frac{ax+3a}{3}=y$

II) $xy=xy-2y+ax-2a$

$xy-xy+2y=ax-2a$

т. е. $2y=ax-2a$

2:

$y=\frac{ax-2a}{2}$

По-

Потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ одно послѣднее уравненіе, найдется x, какъ изъ слѣдующаго видно:

$$\frac{ax-2a}{2} = \frac{ax+3a}{3}$$

$$3ax-6a = 2ax+6a$$

$$3ax-2ax = 6a+6a$$

т. е. $ax = 12a$

a:

$x = 12 =$ числу людей, а каждой платилъ $y = \frac{ax-2a}{2} = \frac{120-20}{2} = 50$ коп. всѣжъ вообще заплатили $xy = 50 \times 12 = 600 = 6$ рубл.

Задача XV. При осадѣ города, одинъ изъ двухъ канонировъ сказалъ другому: ежели отъ нашихъ ядеръ отнять по 7, то у меня останется втрое больше твоего, а когда придать по 7ми ядеръ, то у меня будетъ вдвое больше твоего; спраш. число ядеръ каждаго.

Рѣшен. Положимъ у перваго было x ядеръ, у втораго y, то по обстоятельствамъ вопроса, произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x-7 = (y-7)\cdot 3 = 3y-21$, II) $x+7 = (y+7)\cdot 2 = 2y+14$, изъ коихъ въ первомъ будетъ $x = 3y-21+7 = 3y-14$, а изъ втораго $x = 2y+14-7 = 2y+7$; потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ одно уравненіе $3y-14 = 2y+7$, перенеси количества изъ одной части въ другую съ противными знаками, будетъ $3y-2y = 7+14$, то есть $y = 21$ число ядеръ втораго, а перваго $x = 2y+7 = 49$.

Задача XVI. Ежели бы нѣкоторой параллелограмной полѣ былъ 2мя футами ширѣ и

змя длиннѣе, то бы плоскость его была 64ю квадратными футами больше; а естьли бы змя футами былъ ширѣ и 2мя футами длиннѣе, то бы поверьхность его была 68 квадратными футами больше; спраш. длина и ширина помянутаго пола.

Рѣшен. Положимъ длина пола x, ширина y, $a=64$, $b=68$, то въ разсужденіи вопроса будетъ первое уравненіе $(x+3)\times(y+2)$ (*) $=xy+3y+2x+6=xy+a$, второе $(x+2)\times(y+3)=xy+2y+3x+6=xy+b$, изъ коихъ въ первомъ по переставкѣ величинъ изъ одной части въ другую будетъ $xy-xy+2x=a-3y-6$, а по сокращеніи выйдетъ $2x=a-3y-6$, по раздѣленіи жъ на 2 найдется $x=\frac{a-3y-6}{2}$; во второмъ уравненіи по переставкѣ величинъ будетъ $xy-xy+3x=b-2y-6$, по сокращеніи коего выйдетъ $3x=b-2y-6$, а по раздѣленіи на 3 найдется $x=\frac{b-2y-6}{3}$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составится уравненіе $\frac{b-2y-6}{3}=\frac{a-3y-6}{2}$, изъ коего по исключеніи знаменателей выйдетъ $2b-4y-12=3a-9y-18$, а по перенесеніи величинъ будетъ $9y-4y=3a-2b-18+12$, то есть $5y=3a-2b-6$, а по раздѣленіи на 5 найдется $y=\frac{3a-2b-6}{5}=\frac{3.64-2.68-6}{5}=\frac{192-142}{5}=10$ футъ $=$ ширинѣ пола; а длина онаго $x=\frac{a-3y-6}{2}=\frac{64-3.10-6}{2}=\frac{64-36}{2}=14$ фут.

Зада-

(*) Часть II. §. 133.

Задача XVII. Число 100 раздѣлить на 2 части такъ, чтобы квадратъ ихъ разности, безъ 2000, равенъ былъ квадрату изъ удвоенной меньшей части.

Рѣшен. Положимъ $a=100$, $b=2000$, меньшая часть x, большая будетъ $a-x$, а разность ихъ $a-2x$, и такъ $(a-2x)^2-b=4x^2$, то есть $a^2-4ax+4x^2-b=4x^2$, въ коемъ перенеся величины изъ первой части во вторую, будетъ $a^2-b=4x^2-4x^2+4ax=4ax$, а по раздѣленіи на $4a$ найдется $x=\frac{aa-b}{4a}=\frac{10000-2000}{400}=\frac{8000}{400}=20=$ меньшой части, а большая $a-x=100-20=80$.

Задача XVIII. А и В имѣютъ неизвѣстное число денегъ, А отдалъ В, сколько В имѣлъ, потомъ В отдалъ А, сколько А имѣлъ, послѣ А отдалъ В сколько В у себя имѣлъ, и наконецъ В отдалъ А, сколько онъ тогда имѣлъ, а послѣ такой передачи нашлось у каждаго по 160 рублей; спрашив. сколько каждой сначала имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ А имѣлъ x рубл. В y рубл. и $160=a$, и такъ въ разсужденіи вопроса въ первой разъ будетъ имѣть А$=x-y$, а В$=2y$; потомъ во вторую передачу А будетъ имѣть $2x-2y$, а у В останется $2y-x+y=3y-x$; въ третій разъ у А останется $2x-2y-3y+x=3x-5y$, а у В будетъ $6y-2x$; напослѣдокъ А будетъ имѣть $6x-10y$, а у В останется $6y-2x-3x+5y$ или $11y-5x$; по сей причинѣ $6x-10y=a$, также $11y-5x=a$; изъ коихъ въ первомъ уравненіи найдется $x=\frac{a+10y}{6}$, а во второмъ будетъ $\frac{11y-a}{5}=x$; потомъ

составъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{11y-a}{5}=\frac{a+10y}{6}$, въ коемъ по изключеніи знаменателей, будетъ $66y-6a=5a+50y$, а по перенесеніи величинъ выйдетъ $66y-50y=5a+6a$, то есть $16y=11a$, по раздѣленіи на 16 найдется $y=\frac{11a}{16}=\frac{11.160}{16}=110=$ числу В денегъ; а у А будетъ $x=\frac{a+10y}{6}=\frac{160+110\times10}{6}=\frac{1260}{6}=210$.

Повѣрка

А имѣлъ 210, В имѣлъ 110
-110 $+110$

останется $=100$ будетъ $=220$ въ первой разъ.
$+100$ -100

будетъ $=200$, останется $=120$ во 2й разъ.
-120 $+120$

останется $=80$ будетъ $=240$ въ 3й разъ.
$+80$ -80

будетъ 160 останется $=160$ въ 4й разъ.

Задача XIX Сыскать число, состоящее изъ двухъ знаковъ, которое бы равно было учетверенной суммѣ обоихъ знаковъ; а когда къ искомому числу придастся 36, то бы сумма была равна такому числу, которое произойдетъ отъ перестaвки тѣхъ же знаковъ, одного на мѣсто другаго.

Рѣшеніе. Положимъ число единицъ въ знакѣ, составляющемъ десятки $=x$, а въ знакѣ, означающемъ единицы $=y$, и $36=a$, то по силѣ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $10x+y=(x+y).4=4x+4y$, II) $10x+y+a=10y+x$, изъ коихъ въ первомъ уравненіи $10x$

+

$+y=4x+4y$ перенеся величины, будетъ $10x-4x=4y-y$, то есть $6x=3y$, откуда найдется $x=\frac{3}{6}y=\frac{1}{2}y$; во второмъ $10x+y+a=10y+x$ перенеся величины, будетъ $10x-x=10y-y-a$, то есть $9x=9y-a$, гдѣ $x=\frac{9y-a}{9}$. Потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ x количествъ составится уравненіе $\frac{9y-a}{9}=\frac{y}{2}$, въ которомъ по изключеніи знаменателей будетъ $18y-2a=9y$, а по перемѣнѣ величинъ найдется $18y-9y=2a$, то есть $9y=2a$, гдѣ $y=\frac{2a}{9}=\frac{2.36}{9}=8=$ знаку, составляющему единицы; также $x=\frac{y}{2}=\frac{8}{2}=4=$ числу, означающему десятки, слѣдственно искомое число 48; которое вчетверо больше суммы знаковъ $4+8=12$; но ежели къ найденному числу придать 36, то будетъ число $48+36=84$, коего знаки переставлены одно на мѣсто другаго, то есть мѣсто десятковъ занимаютъ единицы, а на мѣстѣ единицъ поставленъ знакъ десятковъ.

Задача XX. Два бомбардира A и D разговаривали о числѣ своихъ бомбъ. A говоритъ D: ежели бы твоихъ 28 бомбъ придать къ моимъ, то бы у меня было втрое больше твоего; а D сказалъ A: ежели бы твоихъ 35 бомбъ придать къ моимъ, то бы у меня было впятеро больше, нежели у тебя останется: спраш. число бомбъ каждаго.

Въ семъ вопросѣ по предъидущимъ правиламъ найдется, что A имѣетъ 53 бомбы, а D 55 бомбъ.

Задача XXI. Нѣкто имѣетъ два мѣшка денегъ, такъ что деньги перваго мѣшка съ $\frac{2}{3}$ другаго составляютъ 360 рубл. а деньги втораго мѣшка съ $\frac{3}{4}$ перваго также равны 360 рубл. спрашивается сколько въ каждомъ мѣшкѣ денегъ.

Въ семъ вопросѣ найдется въ первомъ мѣшкѣ 240 рубл. а во второмъ 180 рублей.

Задача XXII. *Три человѣка A, B и D покупаютъ домъ, цѣною въ 1000 рублей, но ни одинъ изъ нихъ заплатить своими деньгами не въ состояніи: A можетъ заплатить своими деньгами съ половиною числа денегъ человѣка B; B можетъ заплатить, ежели ему дастъ D $\frac{1}{3}$ своихъ денегъ, а D въ состояніи будетъ заплатить своими деньгами, занявъ $\frac{1}{4}$ денегъ у A; спрашивается, сколько каждой денегъ имѣетъ.*

Рѣшен. Пусть A имѣетъ x рублей, $B = y$, $D = z$ рубл. и $1000 = a$, то по обстоятельствамъ задачи произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x + \frac{1}{2}y = a$, II) $y + \frac{1}{3}z = a$, III) $z + \frac{1}{4}x = a$; посредствомъ коихъ найдется величина x, изъ I) $x = a - \frac{1}{2}y = \frac{2a - y}{2}$ (P); изъ III) $\frac{1}{4}x = a - z$, или $x = 4a - 4z$ (Q); но какъ второе уравненіе величины x въ себѣ не заключаетъ, то составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе (P) $\frac{2a - y}{2} = 4a - 4z$ (Q), въ которомъ по умноженіи каждой части на 2, будетъ $2a - y = 8a - 8z$, откуда найдется $8z = 8a - 2a + y = 6a + y$, гдѣ $z = \frac{6a + y}{8}$; потомъ въ уравненіи II) $y + \frac{1}{3}z = a$ будетъ $\frac{1}{3}z = a - y$, а по умноженіи на 3 выйдетъ $z = 3a - 3y$; напослѣдокъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ z количествъ уравненіе $3a - 3y = \frac{6a + y}{8}$, умножь каждую часть на 8, будетъ $24a - 24y = 6a + y$, изъ коего найдется

$24a - 6a = 24y + y$, то есть $18a = 25y$, а по раздѣленіи на 25, найдется $y = \frac{18a}{25} = \frac{18000}{25} = 720$ деньги человѣка В, А имѣетъ $x = \frac{2a-y}{2} = \frac{2000-720}{2} = 640$; а D имѣетъ $z = 3a - 3y = 3000 - 2160 = 840$.

Прибавленіе. Поелику въ каждомъ уравненіи сего рѣшенія больше двухъ неизвѣстныхъ количествъ не находится, то рѣшеніе сего вопроса можно учинить способнѣе слѣдующимъ образомъ: сыщи изъ перваго уравненія $x + \frac{1}{2}y = a$ величину y, въ которомъ будетъ $y = 2a - 2x$, потомъ поставь сію величину во второмъ уравненіи $y + \frac{1}{3}z = a$ вмѣсто y, будетъ $2a - 2x + \frac{1}{3}z = a$, въ коемъ будетъ $\frac{1}{3}z = 2x - a$, а по умноженіи на 3 найдется $z = 6x - 3a$; поставь сію величину въ третьемъ уравненіи $z + \frac{1}{4}x = a$ на мѣсто z, будетъ $6x - 3a + \frac{1}{4}x = a$, которое умножь на 4, выйдетъ $24x - 12a + x = 4a$, а перенеся величины будетъ $25x = 16a$, откуда найдется $x = \frac{16a}{25} = \frac{16000}{25} = 640$, $z = 6x - 3a = 3840 - 3000 = 840$, а $y = 2a - 2x = 2000 - 1280 = 720$.

Задача XXIII. *На одной батареи находится три кучи ядеръ, изъ коихъ первая съ половиною суммы другихъ составляетъ 1700 ядеръ, вторая съ $\frac{1}{3}$ прочихъ 1700 ядеръ, третья съ $\frac{1}{4}$ прочихъ также составляетъ 1700 ядеръ; спрашивается число ядеръ каждой кучи.*

Рѣшен. Посредствомъ предъидущихъ правилъ найдется въ первой кучѣ 500 ядеръ, во второй 1100 ядеръ въ третiй 1300 ядеръ.

Задача XXIV. *Нѣкто имѣетъ три бочки А, В и С, изъ коихъ ежели бочкою А наполнишь В, то въ А останется еще $\frac{2}{5}$, когдажъ бочкою А наполнишь бочку С, то въ А останется $\frac{5}{9}$, естьлижъ бочкою А наполнять будешь бочки В и С, то недостанетъ четырехъ ведръ; спраш. величина каждой бочки.*

Въ семъ вопросѣ найдется, что бочка A имѣетъ 90 ведръ; бочка B 54 ведр. а число ведръ бочки $C=40$.

Задача XXV. *Три человѣка A, B и C играли въ карты: въ первую игру A проигралъ прочимъ, сколько каждой изъ нихъ имѣлъ; во вторую игру B проигралъ прочимъ, сколько они тогда имѣли, наконецъ въ третью игру C проигралъ прочимъ, сколько они послѣ второй игры имѣли; по окончаніи игры у каждаго нашлось по 80 рублей; спраш. сколько каждой сначала игры имѣлъ.*

Рѣшеніе. Положимъ A имѣлъ x рубл. $B=y$, $C=z$ рубл. и $80=a$, то въ разсужденіи вопроса въ первую игру у A останется $x-y-z$, а B будетъ имѣть $2y$, $C=2z$. Во вторую игру B проигралъ, сколько A и C имѣли, то есть $x-y-z+2z=x-y+z$, и такъ у него останется $2y+y-x-z=3y-x-z$, а прочіе будутъ имѣть вдвое больше, то есть A будетъ имѣть $2x-2y-2z$, а $C=4z$. Въ третью игру C проигралъ сколько A и B имѣли, то есть онъ проигралъ $2x-2y-2z+3y-x-z=x+y-3z$, и такъ у него останется $4z-x-y+3z=7z-x-y$, а прочіе будутъ имѣть вдвое больше, то есть A будетъ имѣть $4x-4y-4z$, а $B=6y-2z-2x$; но какъ послѣ игры, у каждаго нашлось по 80 рублей $=a$; того ради произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $4x-4y-4z=a$, II) $6y-2x-2z=a$, III) $7z-x-y=a$, изъ коихъ сыщется величина x, въ первомъ уравненіи будетъ $x=\frac{a+4y+4z}{4}$; во II) $\frac{6y-2z-a}{2}=x$, изъ III) $7z-y-a=x$. Потомъ изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ составь два слѣдующія уравненія: $\frac{a+4y+4z}{4}=\frac{6y-2z-a}{2}$ (D), и $\frac{6y-2z-a}{2}=7z-y-a$ (E), изъ коихъ въ каждомъ найдется величина y, изъ (D) $\frac{a+4y+4z}{4}=\frac{6y-2z-a}{2}$, по исключеніи знаменателей будетъ $2a+8y+8z=24y-8z-4a$, въ коемъ по перенесеніи величинъ будетъ $2a+4a+8z+8z=24y-8y$, то есть $6a+16z=16y$,

а по раздѣленіи на 16, найдется $y = \frac{6a+16z}{16} = \frac{3a+8z}{8}$, а изъ уравненія (E) $\frac{6y-2z-a}{2} = 7z-y-a$, по умноженіи на 2 будетъ $6y-2z-a = 14z-2y-2a$, въ которомъ по переставкѣ членовъ выйдетъ $6y+2y = 14z+2z-2a+a$, то есть $8y = 16z-a$, а по раздѣленіи на 8, найдется $y = \frac{16z-a}{8} = 2z-\frac{1}{8}a$; наконецъ составя изъ сихъ послѣднихъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{16z-a}{8} = \frac{3a+8z}{8}$, то есть $16z-a = 3a+8z$, переставъ величины изъ одной части въ другую, будетъ $16z-8z = 3a+a$ или $8z = 4a$, гдѣ $z = \frac{4}{8}a = \frac{1}{2}a = \frac{80}{2} = 40 =$ количеству денегъ C; $B = y = 2z-\frac{1}{8}a = 40.2-\frac{80}{8} = 80-10 = 70$, $A = x = 7z-y-a = 40.7-70-80 = 130$ рубл.

Задача XXVI. *Одинъ Полководецъ имѣетъ въ командѣ своей трехъ родовъ военныхъ людей, какъ то, Артиллеристовъ, Гранодеровъ и Мускетеровъ, съ которыми онъ намѣренъ штурмовать городъ, а въ награжденіе обѣщаетъ 2703 рубли, которые между ими раздѣлить условился такъ: каждому изъ тѣхъ военныхъ, кои начнутъ штурмъ, дать по 1 рублю, а прочимъ остальныя раздѣлить по ровну. По сему условію нашлось: естьли начнутъ штурмъ Артиллеристы, то каждой изъ прочихъ получитъ только по $\frac{1}{2}$ рубля; когда же начнутъ штурмъ Гранодеры, то прочимъ достанется по $\frac{1}{3}$ рубля; и наконецъ ежели оной штурмъ начнутъ Мускетеры, то каждому изъ прочихъ достанется только по $\frac{1}{4}$ рубля; спрашивается число каждаго званія людей.*

Рѣшеніе. Положимъ число Артиллеристовъ x, Гранодеровъ y, Мускетеровъ z, а 2703 рубл. $= a$; то въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія:

первое

первое когда осаду начнутъ Артиллеристы, то будетъ $1.x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=a$, второе когда начнутъ штурмъ Гранодеры, то будетъ $1.y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=a$, третіе когда откроютъ штурмъ Мускетеры, то будетъ $1.z+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y=a$; изъ коихъ найдется x слѣдующимъ порядкомъ:

I) $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=a$; $2x+y+z=2a$; $2x=2a-y-z$; $x=\frac{2a-y-z}{2}$

II) $y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=a$; $3y+x+z=3a$; $x=3a-3y-z$

III) $z+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y=a$; $4z+x+y=4a$; $x=4a-4z-y$

Потомъ составя изъ сихъ трехъ равныхъ количествъ два уравненія, найдется y, какъ слѣдуетъ:

$$\frac{2a-y-z}{2}=3a-3y-z$$
$$2a-y-z=6a-6y-2z$$
$$6y-y=6a-2a-2z+z$$
$$5y=4a-z$$
$$y=\frac{4a-z}{5}$$

$$4a-4z-y=3a-3y-z$$
$$3y-y=4z-z-4a+3a$$
$$2y=3z-a$$
$$y=\frac{3z-a}{2}$$

Наконецъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составя одно послѣднее уравненіе, найдется z слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{3z-a}{2}=\frac{4a-z}{5}$$
$$15z-5a=8a-2z$$
$$15z+2z=8a+5a$$
$$17z=13a$$
$$z=\frac{13a}{17}=\frac{2703\times13}{17}=2067 \text{ число Мускетеровъ,}$$

$y=\frac{3z-a}{2}=\frac{2067\times3-2703}{2}=1749$ Гранодер. и $x=3a-3y-z$ $=2703\times3-1749\times3-2067=795$ Артиллеристовъ.

Задача. XXVII. *Найти три числа такіе, чтобы половина перваго съ одною третью другаго, и съ четвертью третьяго составляли число 62, ; также третья часть перваго съ*

чет-

четвертью другаго, и съ одною пятою частію третьяго были равны 47, и наконецъ четверть перваго съ одною пятою втораго и съ одною шестою частію третьяго ровнялись 38.

Рѣшен. Положимъ $a=62$, $b=47$, $c=38$, а искомыя три числа x, y и z, то по обстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=a$, $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=b$, $\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{6}z=c$; у которыхъ по изключеніи знаменателей произойдетъ I) $12x+8y+6z=24a$, II) $20x+15y+12z=60b$, III) $30x+24y+20z=120c$. Теперь для уничтоженія z, вычти второе уравненіе изъ перваго, дважды взятаго, также трижды взятое третье уравненіе изъ упятереннаго втораго уравненія; то въ первомъ случаѣ остатокъ будетъ $4x+y=48a-60b$, а во второмъ останется $10x+3y=300b-360c$; наконецъ сіе послѣднее уравненіе вычти изъ утроеннаго предыдущаго уравненія, останется $2x=144a-480b+360c$, которое раздѣля на 2, найдется $x=72a-240b+180c=24$; но какъ въ уравненіи $4x+y=48a-60b$ найдется $y=48a-60b-4x$, того ради $y=48a-60b-4.24=60$; также изъ уравненія $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=a$, будетъ $\frac{1}{4}z=a-\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}x$, а по умноженіи чрезъ 4, найдется $z=(a-\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}x)\times 4=120$

Задача XXVIII. *Число 90 раздѣлить на три части такъ, чтобы удвоенная первая часть съ 40, утроенная вторая часть съ 20ю, и учетверенная третья часть съ 10ю были равны между собою.*

Рѣшен. Положимъ требуемыя части x, y и z, $90=a$, $40=b$, $20=c$, $10=d$, то въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x+y+z=a$, II) $2x+b=3y+c$, III) $2x+b=4z+d$; изъ коихъ для уничтоженія y и z, умножь первое уравненіе чрезъ 12, второе чрезъ 4, а третіе чрезъ 3, коихъ общая сумма произве-

изведетъ слѣдующее уравненіе: $26x+12y+12z+7b=12a+12y+12z+4+3d$, изъ котораго сыщется $x=\frac{12a+4c+3d-7b}{26}=35$; а изъ уравненія $2x+b=3y+c$ будетъ $2x+b-c=3y$, гдѣ $y=\frac{2x+b-c}{3}=30$; и $z=a-x-y=25$.

Задача XXIX. *Три особы А, В и С раздѣлили между собою неизвѣстную сумму денегъ такимъ образомъ, что число денегъ А безъ четырехъ седьминъ прочихъ составляютъ 300 рубл. количество денегъ В безъ трехъ восьминъ прочихъ также равны 300 рублямъ; и наконецъ количество денегъ С безъ двухъ девятинъ денегъ А и В составляютъ тужъ сумму; спрашивается часть каждаго.*

Рѣшен. Положимъ $a=300$, а требуемыя части x, y и z рублей А, В и С, то по условію вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія:

I) $x-(\frac{4y+4z}{7})=a$ по исключен. знам. $7x-4y-4z=7a$

II) $y-(\frac{3x+3z}{8})=a$ - - $8y-3x-3z=8a$

III) $z-(\frac{2x+2y}{9})=a$ - - $9z-2x-2y=9a$

Но дабы въ сихъ уравненіяхъ уничтожить y, то удвоенное первое уравненіе, также учетверенное третье уравненіе, придай порознь ко второму уравненію, то въ первомъ случаѣ сумма будетъ $11x-11z=22a$ или $x-z=2a$, а во второмъ будетъ $-11x+33z=44a$, или $-x+3z=4a$; наконецъ сложа сіи два послѣднія уравненія вмѣстѣ, выйдетъ $2z=6a$, а по раздѣленіи на 2, найдется $z=3a=900=$ числу денегъ С. Также изъ уравненія $x-z=2a$, найдется $x=2a+z=1500=$ числу денегъ А, и наконецъ изъ уравненія $y-\frac{(3x+3z)}{8}=a$, найдется $y=a+(x+z)\frac{3}{8}=1200=$ числ. денегъ. В.

Примѣчан. Хотя изъ трехъ предъидущихъ предложеній явствуетъ, что требуемыя величины сысканы легчайшимъ способомъ противъ прежнихъ рѣшеній; одна-

однакожъ мало упражняющемуся въ Алгебрѣ или учащемуся оной не всегда можно такъ скоро примѣтить помянутое уничтоженіе буквъ; по сей причинѣ хотя нѣсколько и продолжительнѣе, но удобнѣе разрѣшать подобные вопросы посредствомъ предположенныхъ правилъ.

Задача. XXX. *Сыскать четыре величины такого свойства, чтобы три первыя равны были четвертой съ 50; сумма первой съ третіею и четвертою равна была второй съ 30 ю; сумма первой, второй и четвертой равна была третьей съ 40 ю; и наконецъ сумма второй, третьей и четвертой равна была первой съ 20 ю.*

Рѣшен. Въ семъ вопросѣ полагаются четыре неизвѣстныя величины, слѣдовательно и четыре уравненія быть должны, посредствомъ коихъ неизвѣстныя величины сыскиваются различнымъ образомъ, какъ-то изъ слѣдующихъ рѣшеній видно.

Положимъ неизвѣстныя величины u, x, y и z; $50=a$, $40=b$, $30=c$, $20=d$; то по обстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія:

$u+x+y=z+a$ (A). $u+y+z=x+c$ (C).

$u+x+z=y+b$ (B). $x+y+z=u+d$ (D).

Первой образъ рѣшенія.

1. Сыщи сперва изъ предложенныхъ уравненій величину u, *на примѣръ*, изъ уравненія A, найдется $u=z+a-x-y$ (E); поставь сію величину во всѣхъ трехъ уравненіяхъ B, C и D вмѣсто u, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія:

$2z-2y+a=b$ (F), $2z-2x+a=c$ (G), $2x+2y=a+d$ (H).

2. Сыскавши изъ сихъ трехъ уравненій другую неизвѣстную величину, *на примѣръ* z въ уравненіи F, въ которомъ будетъ $2z=2y+b-a$, а по раздѣленіи на 2, найдется $z=\frac{2y+b-a}{2}$ (I), поставь оную въ уравненіе (G) вмѣсто $2z$, будетъ $2y-2x+b=c$ (K); уравненіе

же

же (H) останется въ своемъ порядкѣ; поелику въ немъ не имѣется буквы z.

3 Сыщи неизвѣстную величину y въ уравненіи (K), отъ чего будетъ $2y = 2x + c - b$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $y = \frac{2x + c - b}{2}$ (M). Поставь сію величину въ уравненіе (H) вмѣсто $2y$, отъ чего произойдетъ $4x + c - b = a + d$ (L), въ которомъ находится одна только неизвѣстная буква x, а по перенесеніи величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $4x = a + d + b - c$, по раздѣленіижъ на 4 найдется $x = \frac{a + d + b - c}{4} = 20$. Наконецъ посредствомъ сей величины сыщутся другія неизвѣстныя тѣхъ уравненій, въ которыхъ находится только буква x, на примѣръ: въ уравненіи M, поставь вмѣсто x найденную величину $\frac{a + d + b - c}{4}$, будетъ $y = \frac{a - b + c + d}{4} = 15$; потомъ поставь сію величину въ уравненіе (I) на мѣсто y, будетъ $2z = \frac{b + c + d - a}{2}$, а по раздѣленіи на 2 найдется $z = \frac{b + c + d - a}{4} = 10$; наконецъ поставя въ уравненіе (E) найденныя величины x, y, и z, сыщется $u = \frac{a + b}{4}$ $\frac{+ c - d}{4} = 25$.

Другимъ образомъ.

Положа прежнія четыре уравненія

$u + x + y = z + a$ (A). $u + y + z = x + c$ (C).

$u + x + z = y + b$ (B). $x + y + z = u + d$ (D).

сыщи во всякомъ изъ сихъ уравненій одну неизвѣстную величину, *на примѣръ* u, которая находится во всѣхъ уравненіяхъ, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія:

$u = z - x - y + a$ (E), $u = y - x - z + b$ (F)

$u = x - y - z + c$ (G), $u = x + y + z - d$ (H)

Потомъ изъ каждыхъ двухъ сихъ равныхъ количествъ составь уравненіе, то есть возьми первое со вторымъ, первое съ третьимъ, и первое съ четвертымъ, отъ чего произойдутъ три слѣдующія уравненія:

I) $z-x-y+a=y-x-z+b$, въ коемъ по переставкѣ членовъ будетъ $2z-2y=b-a$ (I).

II) $z-x-y+a=x-y-z+c$, въ которомъ переставя члены будетъ $2z-2x=c-a$ (K).

III) $z-x-y+a=x+y+z-d$, въ которомъ по перенесенiи членовъ найдется $2x+2y=a+d$ (L); изъ коихъ въ двухъ первыхъ уравненiяхъ сыщется неизвѣстная величина z, какъ слѣдуетъ: $z=\frac{b+2y-a}{2}$ (M). $z=\frac{c+2x-a}{2}$ (N).

Изъ сихъ двухъ равныхъ z количествъ составь уравненiе $\frac{2y+b-a}{2}=\frac{2x+c-a}{2}$, или $2y+b-a=2x+c-a$, въ которомъ $2y+b-c=2x$, а по раздѣленiи на 2 сыщется $x=\frac{2y+b-c}{2}$ (P). Потомъ написавъ уравненiе (L) $2x+2y=a+d$ найдется неизвѣстная $x=\frac{a+d-2y}{2}$ (Q); но какъ каждое изъ сихъ послѣднихъ уравненiй равныхъ x раздѣлено на 2, того ради составится изъ нихъ уравненiе $2y+b-c=a+d-2y$. въ коемъ по перестaвкѣ величинъ будетъ $4y=a+d+c-b$, а по раздѣленiи на 4 найдется $y=\frac{a+d+c-b}{4}$ (R). Поставь сiе количество въ уравненiяхъ (M) и (P) на мѣсто y, то будетъ первое $z=\frac{b+c+d-a}{4}$ (S), второе, $x=\frac{a+b-c+d}{4}$ (T); наконецъ поставя въ уравненiе E вмѣсто x, y и z найденныя количества, кои означены буквами (R), (S) и (T) найдется $u=\frac{a+b+c-d}{4}$.

Третiй образъ рѣшенiя

Подобныя рѣшенiя вопросовъ иногда производятся чрезъ сложенiе или вычитанiе нѣсколько разъ уравненiй: однакожъ не всегда оное учинить можно, но прежде должно разсмотрѣть условiя вопроса, а потомъ уже производить рѣшенiе, какъ здѣсь въ разсужденiи предложенной задачи учинено:

$$u+x+y=z+a$$
$$u+x+z=y+b$$
$$u+y+z=x+c$$
$$x+y+z=u+d$$

Сыщи каждаго изъ сихъ уравненій величину какой нибудь буквы, *на примѣръ* u, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія:

$$u=z-x-y+a$$
$$u=y-x-z+b$$
$$u=x-y-z+c$$
$$u=x+y+z-d$$

изъ коихъ каждое означаетъ величину одной буквы u. Сложи всѣ сіи уравненія вмѣстѣ, коихъ сумма будетъ $4u=a+b+c-d$, гдѣ $u=\frac{a+b+c-d}{4}$.

Теперь изъ первыхъ четырехъ уравненій сыщи величину буквы x, будетъ
$$x=z-u-y+a$$
$$x=y-u-z+b$$
$$x=u+y+z-c$$
$$x=u-y-z+d$$
Сумма сихъ четырехъ равныхъ величинъ, будетъ $4x=a+b-c+d$, гдѣ $x=\frac{a+b-c+d}{4}$.

Сыщи потомъ изъ первыхъ четырехъ уравненій величину y, будетъ
$$y=z-u-x+a$$
$$y=u+x+z-b$$
$$y=x-u-z+c$$
$$y=u-x-z+d$$
коихъ сумма будетъ $4y=a-b+c+d$, откуда найдется $y=\frac{a-b+c+d}{4}$.

Наконецъ изъ первыхъ четырехъ уравненій найдется z, какъ-то
$$z=u+x+y-a$$
$$z=y-u-x+b$$
$$z=x-u-y+c$$
$$z=u-x-y+d$$

ко-

коихъ сумма $4z = d + c + b - a$, а по раздѣленіи на 4 будетъ $z = \frac{d + c + b - a}{4}$, гдѣ также $u = 25$, $x = 20$, $y = 15$, и $z = 10$.

Задача. XXXI. *Число 90 раздѣлить на 4 части такъ, чтобы первая часть съ 5 ю, вторая безъ 4, третья умноженная тремя, а четвертая раздѣленная на 2, были равны между собою.*

Рѣшен. Положимъ искомыя части u, x, y и z, а $90 = a$, то въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: $u + x + y + z = a$, $u + 5 = x - 4 = 3y = \frac{z}{2}$, откуда будетъ I) $u + 5 = x - 4$, II) $u + 5 = 3y$, III) $u + 5 = \frac{z}{2}$.

Сыщи каждаго изъ четырехъ уравненій величину буквы u, 1) $u = x - 9$, 11) $u = 3y - 5$, 111) $u = \frac{z - 10}{2}$, а изъ уравненія $u + x + y + z = a$ выйдетъ $u = a - x - y - z$, потомъ изъ сихъ четырехъ равныхъ количествъ составь три слѣдующія уравненія: $x - 9 = 3y - 5$ (A).

$$x - 9 = \frac{z - 10}{2} \text{ (B)}.$$

$$x - 9 = a - x - y - z \text{ (C)}.$$

Сыщи въ каждомъ изъ сихъ трехъ уравненій величину x какъ-то: изъ уравненія (A) будетъ $x = 3y + 4$. Изъ (B) выйдетъ $x = \frac{z + 8}{2}$; изъ (C) найдется $2x = a + 9 - y - z$, гдѣ $x = \frac{a + 9 - y - z}{2}$, потомъ изъ сихъ найденныхъ трехъ равныхъ количествъ составь два слѣдующія уравненія:

$$3y + 4 = \frac{z + 8}{2} \text{ (D)}.$$

$$3y + 4 = \frac{a + 9 - y - z}{2}.$$

или $6y + 8 = a + 9 - y - z$ (E).

изъ коихъ въ уравненіи (D) сыщется $3y = \frac{z}{2}$ или $6y = z$, то есть $y = \frac{z}{6}$ (F). Поставь $6y$ въ уравненіе (E) вмѣсто z, будетъ $6y + 8 = a + 9 - y - 6y = a + 9 - 7y$, откуда найдется $13y = a + 1$, гдѣ $y = \frac{a+1}{13} = \frac{91}{13} = 7$. Въ уравненіи (F) $z = 6y = 42$, $x = 3y + 4 = 25$, $u = x - 9 = 16$.

Другимъ образомъ:

Рѣшеніе сего вопроса можно произвесть и одною буквою, какъ слѣдуетъ: положимъ, четвертая часть $= x$. И такъ когда три раза взятая третья часть равна $\frac{x}{2}$, то оная будетъ $\frac{x}{2} : 3 = \frac{x}{6}$; вторая же часть 4 ю меньше $\frac{x}{2}$, по сему оная часть будетъ $\frac{x}{2} + 4$; также первая часть 5 ю больше $\frac{x}{2}$, слѣдовательно оная будетъ $\frac{x}{2} - 5$. По сей причинѣ сумма всѣхъ сихъ частей вмѣстѣ взятыхъ, будетъ $x + \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + 4 + \frac{x}{2} - 5 = a$, то есть $2x + \frac{x}{6} - 1 = a$, откуда найдется $13x = (a+1).6 = 91.6$, а по раздѣленіи на 13 найдется $x = 42$ четвер. часть, $\frac{x}{6} = \frac{42}{6} = 7$ третья часть, $\frac{x}{2} + 4 = 25$ вторая часть, и наконецъ первая часть $\frac{x}{2} - 5 = 16$.

или:

Положимъ, первая часть x, которая съ 5 ю равна второй части безъ 4, то вторая часть будетъ $x + 5 + 4 = x + 9$; третья, трижды взятая, равна первой съ 5 ю, посему оная будетъ $\frac{x+5}{3}$; четвертая часть раздѣленная на 2, также равна первой съ 5, слѣдовательно оная будетъ $(x+5) \times 2 = 2x + 10$: и такъ сумма всѣхъ сихъ частей, вмѣстѣ взятыхъ, будетъ $x + x + 9 + \frac{x+5}{3} + 2x + 10 = 4x + \frac{x+5}{3} + 19 = a$, а по умноженіи на

3 будетъ $12x+x+5+57=3a$, откуда найдется $13x=3a-62$, а по раздѣленіи на 13, будетъ $x=\frac{3a-62}{13}=16$ первая часть, $x+9=25$ вторая часть, $\frac{x+5}{3}=7$ третья, и $2x+10=42$ четвертая, тоже, что и прежде.

Задача. XXXII. Два источника уравненнаго движенія наполняютъ вмѣстѣ прудъ A, такъ что первой продолжалъ въ теченіи время b, другой время d; тѣжъ источники наполняютъ другой прудъ E, одинъ продолжалъ въ теченіи время e, а другой n: спрашивается, какъ велико изтеченіе источниковъ въ часъ, то есть сколько бочекъ или ведръ каждой можетъ наполнить въ часъ.

Рѣшен. Положимъ, что первой наполнитъ въ часъ x бочекъ, второй y. И такъ умножь время b числомъ бочекъ x, произведеніе bx будетъ равно количеству изтеченія перваго источника во время b; потомъ умножь d чрезъ y, произведеніе dy будетъ равно количеству изтеченія втораго источника, коихъ сумма $bx+dy=A$; по сей же причинѣ $ex+ny=E$. Изъ перваго уравненія $bx+dy=A$ найдется $bx=A-dy$, а по раздѣленіи на b, выйдетъ $x=\frac{A-dy}{b}$; изъ втораго жъ уравненія $ex+ny=E$ выйдетъ $ex=E-ny$, а по раздѣленіи на e найдется $x=\frac{E-ny}{e}$; потомъ составя изъ помянутыхъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{A-dy}{b}=\frac{E-ny}{e}$, умножь каждую часть чрезъ b и чрезъ e, выйдетъ $Ae-dey=Eb-bny$; по перестановкѣжъ величинъ будетъ $bny-dey=Eb-Ae$, откуда найдется $y=\frac{Eb-Ae}{bn-de}$; и наконецъ по сему извѣстному количеству найдется

количество x. Положимъ, прудъ A содержитъ въ себѣ 90 бочекъ, $b=3$ часамъ, $d=5$ часамъ. Второй прудъ $E=64$ бочк. $e=2$ час. $n=4$ час. то будетъ $y=\frac{64\times3-90\times2}{3\times4-5\times2}=\frac{12}{2}=6$ бочек. изтеченіе втораго источника въ часъ, а изтеченіе перваго $x=\frac{A-dy}{2}=\frac{90-5.6}{3}=20$.

Задача. XXXIII. Дано число кучекъ n изъ картъ, изъ коихъ каждая кучка такъ разположена, что число очковъ нижней карты съ числомъ картъ, сверьхъ оной положенныхъ, составляетъ извѣстное число p, а остальныхъ отъ разположенія кучекъ картъ d; спрашивается число пятенъ или очковъ, въ нижнихъ картахъ содержащееся.

Рѣшен. Положимъ, въ игрѣ число картъ m, число очковъ нижнихъ картъ въ первой кучкѣ u, во второй x, въ третїй y, въ четвертой z и проч.: то по свойству вопроса, число всѣхъ картъ въ первой кучкѣ будетъ $p+1-u$ (поелику когда къ числу верьхнихъ картъ съ числомъ очковъ нижней карты, то есть къ p придастся одна нижняя карта, то число всѣхъ картъ съ числомъ пятенъ u нижней карты, будетъ въ кучкѣ $p+1$; естьлижъ изъ сего числа вычтется число очковъ нижней карты u, то останется число однихъ картъ первой кучки $=p+1-u$, во второй будетъ $p+1-x$, въ третьей $p+1-y$, въ четвертой $p+1-z$ и такъ далѣе, коихъ общая сумма съ остальными картами равна числу картъ m; то есть, $(p+1-u)+(p+1-x)+(p+1-y)+(p+1-z)+$ и проч. $+d=m$; изъ сего видно, что $p+1$ столько разъ берется, сколь велико число кучекъ, по сей причинѣ $(p+1)n-(u+x+y+z+$ и проч.$)+d=m$, а по переставкѣ членовъ изъ одной части уравненія въ другую, будетъ $(p+1)n+d-m=u+x+y+z+$ и проч. равно числу очковъ нижнихъ картъ, то есть: когда считанное число верьхнихъ картъ съ нижними пятнами сложится съ еди-

единицею, потомъ умножится числомъ кучекъ n, и къ сему произведенїю придастся число остальныхъ картъ, а наконецъ вычтется число картъ m всей игры; то остатокъ покажетъ число очковъ въ нижнихъ картахъ.

Дабы имѣть о семъ ясное понятїе, то положимъ, что въ игрѣ было 36 картъ, гдѣ означаетъ валетъ 2 очка, дама 3, король 4, а тузъ 11; и что карты разкладены были на шесть кучекъ, и число очковъ нижней карты съ числомъ верьхнихъ картъ каждой кучки считано до тринадцати, а нижнїя карты положены были слѣдующїя:

Кучки	1	2	3	4	5	6 я.
ниж. карт.	7 рка.	туз.	10 ка	9 ка	туз.	8 рка
числ. ихъ очк.	7 +	11 +	10 +	9 +	11 +	8 = 56:

то число верьхнихъ картъ, положено на нижнюю карту
6 + 2 + 3 + 4 + 2 + 5 = 22.
И такъ число верьхнихъ картъ съ нижними будетъ $22+6=28$, остальныхъ картъ будетъ 8; то по свойству общаго правила, будетъ $(13+1)\times6+8-36=14\times6+8-36=56=$ числу очковъ нижнихъ картъ.

Такимъ же образомъ познается число очковъ въ нижнихъ картахъ, естьли въ игрѣ будетъ 52 карты, гдѣ тузъ значитъ 1, валетъ 11, дама 12, а король 13.

Примѣч. Ежели при начотѣ картъ до какого нибудь числа на нижнее число очковъ не будетъ доставать на послѣднюю кучку, *на прим.* d картъ; то уравненїе будетъ слѣдующее: $(p+1)n-d-m=u+x+y+z+$ и проч. или $(p+1)n-(d+m)=u+x+y+z+$ и проч. $=$ числу очковъ нижнихъ картъ, то есть, когда къ числу верьхнихъ картъ съ числомъ очковъ нижнихъ картъ придастся единица, и сумма ихъ умножится чрезъ число кучекъ, а изъ сего произведенїя вычтется число картъ всей игры съ числомъ не достающаго числа картъ въ послѣднюю кучку, то разность покажетъ число очковъ въ нижнихъ картахъ.

О уравненіяхъ второй степени.

§ 127. *Опредѣл.* Чистое второй степени уравненіе именуется то, въ которомъ неизвѣстная величина есть второй степени, *на примѣръ*, $x^2 + b = d^2$. Смѣшанное квадратное уравненіе есть то, въ которомъ находится неизвѣстная величина второй и первой степени перемѣшаны съ другими, какъ *на прим.* $x^2 + ax = bd$, или $bx^2 - x = c^2$ и проч.

§ 128. *Задача.* Въ данномъ чистомъ уравненіи второй степени найти неизвѣстную величину.

Рѣшен. Положимъ, данное уравненіе будетъ *на примѣръ* $x^2 + a = d$, то перенеся величину a изъ первой части уравненія въ другую, будетъ $x^2 = d - a$, потомъ извлеки квадратные корни изъ обѣихъ частей уравненія, найдется требуемая величина $x = \pm \sqrt{(d-a)}$. Пусть будетъ $a = 3$, $d = 28$, то $\sqrt{x^2} = \pm x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$ (§ 86); ибо $+5 \times +5 = -5 \times -5 = 25$.

Ежели уравненіе будетъ *на прим.* $bx^2 = c$, то по раздѣленіи обѣихъ частей на количество b, будетъ $x^2 = \frac{c}{b}$, а по извлеченіи квадратныхъ корней найдется $\sqrt{x^2} = \pm x = \pm \sqrt{\frac{c}{b}}$.

Примѣры чистаго второй степени уравненія.

Задача I. Сыскать число, котораго $\frac{1}{4}$, умноженная одною восьмою частію тогоже числа, производитъ число 128.

Рѣ-

Рѣшен. Положимъ искомое число x, и $128 = a$, то по условію вопроса будетъ $\frac{1}{4}x \times \frac{1}{8}x = a$, то есть $\frac{x^2}{32} = a$, а по умноженіи на 32, выйдетъ $x^2 = 32a$. наконецъ по извлеченіи квадратныхъ корней сыщется $x = \sqrt{32a} = \pm \sqrt{4096} = 64$, въ которомъ $64 \times \frac{1}{4} = 16$, и $64 \times \frac{1}{8} = 8$, коихъ произведеніе $16 \times 8 = 128$.

Задача. II. Найти число, къ которому ежели придано будетъ 5, и тоже число изъ него вычтется, потомъ первая сумма на сію разность умножится, то бы произведеніе было 96.

Рѣшен. Положимъ искомое число x, $5 = a$, и $96 = b$, то въ разсужденіи вопроса, произойдетъ слѣдующее уравненіе: $(x + a) \times (x - a) = b$, то есть $x^2 - a^2 = b$; придай къ обѣимъ частямъ a^2, будетъ $x^2 = b + a^2$; потомъ извлеки корень квадрата, найдется $x = \pm \sqrt{(b + a^2)} = \sqrt{121} = 11$. И такъ $x + 5 = 16$, и $x - 5 = 6$; по сему $16 \times 6 = 96$.

Задача III. На одной батареи находилось нѣсколько пушекъ, изъ каждой выстрѣлено зарядовъ вдесятеро больше числа пушекъ; каждые 25 зарядовъ убивали непріятеля вдвое больше числа пушекъ; естьлижъ сотую часть убитыхъ умножить чрезъ $\frac{5}{9}$, то выйдетъ число пушекъ; коихъ число найти требуется.

Рѣшен. Положимъ число пушекъ x: когда каждая выстрѣлила $10x$, то число всѣхъ выстрѣловъ будетъ $10x^2$, каждые 25 выстрѣловъ убивали по $2x$, то число убитыхъ будетъ

$10x^2 \times \frac{2x}{25} = \frac{20x^3}{25} = \frac{4x^3}{5}$; сотая часть сего числа, то есть $\frac{4x^3}{500}$ умноженная $\frac{5}{9}$ выйдетъ $\frac{20x^3}{4500} = \frac{x^3}{225}$, равно числу пушекъ: и такъ произойдетъ уравненіе $\frac{x^3}{225} = x$, или $x^3 = 225x$, а по раздѣленіи на x выдетъ $x^2 = 225$, въ которомъ по извлеченіи корней найдется $x = 15$.

Задача IV. Извѣстна сумма двухъ чиселъ $= a$, произведеніе ихъ $= b$: найти оныя числа.

Рѣшен. Положимъ разность требуемыхъ чиселъ $= x$: то большое число будетъ $\frac{a}{2} + \frac{x}{2} = \frac{a+x}{2}$, а меньшое $\frac{a-x}{2}$ (§ 122 *Задача* VIII), коихъ произведеніе будетъ $(\frac{a+x}{2}) \times (\frac{a-x}{2}) = \frac{a^2-x^2}{4} = b$; а по умноженіи чрезъ 4 будетъ $a^2 - x^2 = 4b$, въ коемъ $a^2 - 4b = x^2$; а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня, найдется $x = \pm\sqrt{(a^2-4b)}$. Положимъ, что $a = 14$, $b = 48$; то будетъ $x = \pm 2$, и два искомыя числа $7+1$ и $7-1$, то есть 8 и 6 *). Естьлижъ будетъ $a = 4$ и $b = 5$, то будетъ $x = \pm\sqrt{-4}$, количество невозможное, отъ котораго два требуемыя числа, коихъ бы сумма была 4, а произведеніе 5, произойти не могутъ.

Задача V. Извѣстна разность и произведеніе двухъ чиселъ; сыскать оныя числа

Рѣшен. Положимъ разность чиселъ $= a$, произведеніе $= b$, а сумма неизвѣстныхъ чиселъ $= x$

*) Рѣшеніе сего вопроса относится къ Геометрической задачѣ второй Части § 176.

$=x$: то будетъ большое число $=\frac{a+x}{2}$, а меньшое $=\frac{x-a}{2}$ (§ 122 Задача VIII), коихъ произведеніе будетъ $(\frac{x+a}{2})\times(\frac{x-a}{2})=\frac{x^2-a^2}{4}=b$, или $x^2-a^2=4b$, гдѣ $x^2=4b+a^2$, а по извлеченіи корней найдется $x=\pm\sqrt{(4b+a^2)}$. Положимъ $a=4$, $b=96$, то будетъ $x=\pm\sqrt{(384+16)}=\pm 20$, откуда найдется большое число $10+2=12$ а меньшое $10-2=8$ *).

О смѣшанныхъ второй степени уравненіяхъ.

§ 129. *Задача.* Въ смѣшанномъ второй степени уравненіи найти неизвѣстную величину.

Рѣшен. Положимъ, что смѣшанное квадратное уравненіе будетъ $x^2+2ax=b^2$; то изъ сего легко усмотрѣть можно, что первая часть сего уравненія есть неполной квадратъ: ибо ежели корень состоитъ изъ двухъ частей, какъ *напримѣръ* $x+a$, то квадратъ онаго долженъ быть изъ трехъ членовъ (§ 59), заключающихъ въ себѣ квадраты обѣихъ частей, и двойное произведеніе первой части на вторую; слѣдовательно въ семъ уравненіи x^2 почесться можетъ квадратомъ первой части, а $2ax$ будетъ двойное произведеніе первой части на вторую, слѣдовательно $\frac{2a}{2}=a$ есть вторая часть корня. И такъ дабы сдѣлать первую часть уравненія со-

*) Сей вопросъ относится къ § 179 тойже Части.

совершеннымъ квадратомъ, то придай квадратъ изъ половины предстоящаго неизвѣстной величины x, то есть $(\frac{2a}{2})^2 = a^2$ къ обѣимъ частямъ уравненія, отъ чего произойдетъ слѣдующее уравненіе: $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$; а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня, будетъ $x + a = \pm\sqrt{(b^2 + a^2)}$; естьлижъ изъ каждой части сего уравненія вычтется величина a, то найдется $x = -a \pm \sqrt{(b^2 + a^2)}$.

Ежели уравненіе будетъ $x^2 - px = -q$, то величина px, также будетъ двойное произведеніе первой части на вторую, въ коемъ $-\frac{p}{2}$ будетъ вторая часть корня; и такъ дабы первую часть уравненія сдѣлать совершеннымъ квадратомъ, то придай къ обѣимъ частямъ уравненія, квадратъ изъ половины предстоящаго $-p$, то есть $\frac{1}{4}p^2$, отъ чего выйдетъ слѣдующее уравненіе: $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня, будетъ $x - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ или $x - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{p^2 - 4q}{4})}$, въ коемъ перенеся извѣстную величину изъ первой части во вторую, найдется $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{p^2 - 4q}{4})}$; но какъ корень знаменателя 4 есть 2, по сей причинѣ будетъ $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Примѣчан. I. Ежели въ такомъ уравненіи, величина q будетъ меньше, нежели $\frac{1}{4}p^2$: то два искомые корня будутъ дѣйствительные; естьлижъ q будетъ больше $\frac{1}{4}p^2$, то искомые корни будутъ невозможные, или мнимые; ибо пусть бу-

будетъ $\frac{1}{4}p^2-q=-cc$, то $\sqrt{-cc}$ есть количество невозможное (§ 87). Когда будетъ $-q=\frac{1}{4}p^2$, то $\frac{1}{4}p^2-q=0$, по сему будетъ $x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{0}=\frac{p}{2}\pm 0=\frac{1}{2}p$, то есть оба корня равны будутъ $\frac{1}{2}p$.

Примѣчан. II. Ежели уравненіе будетъ слѣдующее: $-ax^2+2abx=d$, то дабы x^2 не имѣлъ никакого предстоящаго, кромѣ единицы, раздѣли обѣ части уравненія на предстоящее a, отъ чего произойдетъ $-x^2+2bx=\frac{d}{a}$; а чтобъ сдѣлать $-x^2$ положительнымъ, то перемѣня знаки всего уравненія въ противные (§ 123), будетъ $x^2-2bx=-\frac{d}{a}$, въ которомъ по предписанному правилу найдется $x=b\pm\sqrt{(b^2-\frac{d}{a})}$.

Слѣдст. Изъ предписанныхъ предложеній видно, что неизвѣстное количество, *на примѣръ* x, всегда будетъ равно половинѣ предстоящаго простой величины x съ противнымъ знакомъ и квадратному корню $+$ или $-$ изъ второй части уравненія съ квадратомъ половины предстоящаго помянутой величины x, *на примѣръ*: естьли бы случилось уравненіе $x^2-6x=7$, то бы нашлось, что $x=3\pm\sqrt{(7+9)}=3\pm 4$, то есть въ первомъ случаѣ будетъ $x=7$, а во второмъ $x=+1$.

Прибавлен. Всякое смѣшанное второй степени уравненіе, *на примѣръ* $x^2+ax=bd$, можно обратить въ чистое квадратное уравненіе слѣдующимъ образомъ: положимъ, что корень x перваго члена x^2 съ половиною предстоящаго простой величины x будетъ ровенъ y, то есть $x+\frac{1}{2}a=y$, въ которомъ ежели величина $\frac{1}{2}a$ перенесется

несется въ другую часть уравненія, то будетъ $x = y - \frac{1}{2}a$; отъ сего произойдетъ $x^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$, и $ax = (y - \frac{1}{2}a).a = ay - \frac{1}{2}a^2$; естьлижъ два сіи уравненія сложатся вмѣстѣ, то будетъ $x^2 + ax = y^2 - \frac{1}{4}a^2 = bd$, въ коемъ переставя величину $\frac{1}{4}a^2$ изъ первой части во вторую, произойдетъ чистое квадратное уравненіе $y^2 = bd + \frac{1}{4}a^2$, а по извлеченіи квадратнаго корня будетъ $y = \pm\sqrt{(bd + \frac{1}{4}a^2)}$ откуда найдется $x = y - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(bd + \frac{1}{4}a^2)}$.

Примѣры смѣшаннаго второй степени уравненія.

Задача I. Найти число, котораго ежели $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ умножатся между собою, и къ сему произведенію придастся $\frac{1}{2}$ искомаго числа, то бы вышло 30.

Рѣшен. Пусть искомое число x, то въ разсужденіи вопроса будетъ $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x^2$, къ сему приложа $\frac{1}{2}x$, сумма будетъ $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x = 30$, или $\frac{x^2 + 3x}{6} = 30$, а по умноженіи на 6, выйдетъ $x^2 + 3x = 180$; придай къ каждой части уравненія квадратъ изъ половины предстоящаго величины x, будетъ $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4}$; потомъ извлеки изъ каждой части уравненія квадратной корень, выйдетъ $x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{(180 + \frac{9}{4})} = \pm 13\frac{1}{2}$, въ которомъ по перенесеніи $\frac{3}{2}$ изъ первой части во вторую, найдется $x = \pm 13\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 12$ или $x = -15$ (§ 86).

Задача. II. Дядя говоритъ племяннику: ежели изъ квадратнаго числа тѣхъ денегъ, кои

я тебѣ подарить намѣренъ, вычтется 4 раза взятое число денегъ, то остатокъ будетъ 5 рублей; спрашив. число денегъ, кои дядя племяннику подарить желаетъ.

Рѣшен. Положимъ, число денегъ будетъ x, и $5=a$, то въ разсужденіи вопроса будетъ квадратъ онаго числа x^2, а учетверенное число $4x$, по сему $x^2-4x=a$, откуда найдется $x=2\pm\sqrt{(a+4)}=2\pm\sqrt{9}=2\pm3$, то есть $x=5$ или $x=-1$.

Примѣчан. I. Изъ сего видно, что первый корень 5 есть подлинное въ разсужденіи вопроса искомое число 5 ибо квадратъ изъ 5 безъ $4\times5=5$. Но второй корень -1, въ рѣшеніи сего вопроса заключающійся, хотя въ уравненіи и представляетъ мнимую величину, однакожъ можетъ быть принятъ требуемымъ числомъ; поелику когда сіе учетверенное число вычтется изъ квадрата онаго, то остатокъ будетъ также $=5$.

Примѣчан. II. Естьли бы въ вопросѣ требовалось, чтобы остатокъ былъ $=-13$, то бы нашлось, что $x=2\pm\sqrt{(-13+4)}$ или $x=2\pm\sqrt{-9}$; но корень изъ -9 есть количество невозможное или мнимое; ибо всякое число, само собою умножающееся, не можетъ произвесть -9 (потому что $+3\times+3=+9=-3\times-3=+9$); слѣдственно такой вопросъ будетъ невозможной (§ 87): чѣмъ и всѣ другія подобныя сему вопросу несправедливости опровергаются.

Задача III. Найти два числа, изъ коихъ одно вдвое больше другаго, а сумма ихъ съ произведеніемъ составляютъ 90.

Рѣшен. Положимъ искомое число x, большое будетъ $2x$, $90=a$, то сумма ихъ съ произведеніемъ будетъ $2x^2+3x=a$; раздѣли на 2, выйдетъ $x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}a$; откуда найдется $x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{(\frac{a}{2}+\frac{9}{16})}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{(45+\frac{9}{16})}=-\frac{3}{4}\pm\frac{27}{4}$, по сему $x=6$ или $x=-7\frac{1}{2}$.

За-

Задача IV. Сыскать два числа, коихъ разность $= d$, и когда количество a раздѣлится на оба искомыя числа, то бы разность частныхъ была $= b$.

Рѣшен. Положимъ меньшое число x, большое будетъ $x + d$: и такъ по силѣ вопроса будетъ $\frac{a}{x} - \frac{a}{x+d} = b$, а по изключеніи дробей будетъ $bx^2 + bdx = ax + ad - ax$ или $bx^2 + bdx = ad$; раздѣли на b выдетъ $x^2 + dx = \frac{ad}{b}$; откуда найдется $x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{(\frac{ad}{b} + \frac{d^2}{4})} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{(\frac{4ad + bd^2}{4b})}$. Положимъ что $a = 72$, $d = 4$, $b = 3$, то найдется $x = -2 \pm \sqrt{100} = 10 - 2$. И такъ меньшое число будетъ $10 - 2 = 8$, а большое $10 + 2 = 12$.

Задачи. V. Найти число, котораго бы квадратъ безъ 9 ти тѣмъ превышалъ число 100, чѣмъ искомое число меньше 23.

Рѣшен. Пусть будетъ искомое число x, то въ разсужденіи вопроса $x^2 - 9$ превышаетъ число 100 количествамъ $x^2 - 109$, а искомое число x, меньше 23 количествомъ $23 - x$; отъ чего произойдетъ уравненіе $x^2 - 109 = 23 - x$, а переставя величины изъ одной части въ другую найдется $x^2 + x = 132$, въ которомъ $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(132 + \frac{1}{4})} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2} = 11$, а въ другомъ случае $x = -12$.

Задача. VI. Въ уравненіи $3\sqrt{2x + 8} = 3x + 5$, сыскать неизвѣстную величину x.

Рѣ-

Рѣшен. Вычти изъ обѣихъ частей уравненія 8, останется $3\sqrt{2x}=3x-3$; раздѣли на 3 выйдетъ $\sqrt{2x}=x-1$; потомъ возвысь каждую часть во вторую степень, будетъ $2x=x^2-2x+1$ или $x^2-4x=-1$, откуда найдется $x=2\pm\sqrt{3}$.

Задача. VII. Количество a раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы половина квадрата первой части равна была двумъ третямъ квадрата второй части.

Рѣшен. Положимъ меньшое число x, большое будетъ $a-x$; изъ коихъ квадратъ большаго количества будетъ $a^2-2ax+x^2$, а меньшаго x^2, и такъ по свойству вопроса будетъ $(a^2-2ax+x^2)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x^2$, то есть $\frac{a^2-2ax+x^2}{2}=\frac{2x^2}{3}$, а по изключеніи знаменателей выйдетъ $3a^2-6ax+3x^2=4x^2$; откуда найдется $x^2+6ax=3a^2$, когдажъ къ обѣимъ частямъ придастся квадратъ изъ половины предстоящаго x, то выйдетъ $x^2+6ax+9a^2=12a^2$, а по извлеченіи квадратныхъ корней найдется $x+3a=\pm\sqrt{12a^2}$, гдѣ $x=-3a\pm\sqrt{12a^2}$; а болѣшее число $=4a-\sqrt{12a^2}$. Положимъ, что $a=10$, то будетъ $x=-30\pm\sqrt{1200}=-30\pm20\sqrt{3}$; а большое $=40-20\sqrt{3}$.

Задача. VIII. 300 человѣкъ войска построены были такъ, что въ шеренгѣ 97 ю человѣками больше, нежели въ ряду; спрашивается число людей въ шеренгѣ и въ каждомъ ряду.

Рѣшен. Положимъ $300=a$, $97=b$, въ каждомъ ряду $=x$, то въ шеренгѣ будетъ $x+b$. И такъ число людей въ строю будетъ $(x+b)\times x=x^2+bx=a$, откуда найдется $x=-\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(a+\frac{1}{4}b^2)}=3=$ числу людей въ ряду, а въ шеренгѣ будетъ $x+b=3+97=100$.

Задача. IX. Сыскать два числа, коихъ сумма $=13$, а произведеніе ихъ съ меньшимъ числомъ, трижды взятымъ, составляетъ число 55.

Рѣшен. Положимъ $13=a$, $55=b$, разность искомыхъ чиселъ $=x$, то большое число будетъ $\frac{a+x}{2}$, меньшое $\frac{a-x}{2}$, коихъ произведеніе $(\frac{a+x}{2})\times(\frac{a-x}{2})=\frac{a^2-x^2}{4}$, а трижды взятое меньшое число $=(\frac{a-x}{2})\times 3=\frac{3a-3x}{2}$; коихъ сумма $\frac{a^2-x^2}{4}+\frac{3a-3x}{2}=b$, или $\frac{a^2-x^2+6a-6x}{4}=b$; умножъ каждую часть чрезъ 4, будетъ $a^2-x^2+6a-6x=4b$, а переставя члены изъ одной части въ другую, выйдетъ $-x^2-6x=4b-a^2-6a$; или $x^2+6x=a^2+6a-4b$; откуда найдется $x=-3\pm\sqrt{(a^2+6a-4b+9)}=3$, меньшое число $\frac{a-x}{2}=5$, а большое $\frac{a+x}{2}=8$.

Задача X. Найти число, коего квадратъ, сложенной съ произведеніемъ изъ разности количествъ a и b и искомаго числа, производитъ c^2.

Рѣшен. Положимъ искомое число x, то по условію вопроса будетъ $x^2+(a-b).x=c^2$; придай къ обѣимъ частямъ квадратъ изъ половины

вины предстоящаго $a-b$, будетъ $x^2+(a-b)x + (\frac{a-b}{2})^2 = c^2 + (\frac{a-b}{2})^2$, а по извлеченіи квадратнаго корня, найдется $x = -(\frac{a-b}{2}) \pm \sqrt{c^2 + (\frac{a-b}{2})^2}$. Положимъ $a=3$, $b=2$, $c^2=16$, найдется $x = -(\frac{3-2}{2}) \pm \sqrt{16+\frac{1}{4}} = \frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$.

Задача XI. Нѣкто купилъ неизвѣстное число концовъ сукна за 180 рублей, и естьли бы за тѣжъ деньги можно было купить того сукна три конца больше, то бы каждой кусокъ обошелся ему 3мя рублями дешевлѣ; спрашивается, сколько концовъ сукна куплено.

Рѣшен. Положимъ число концовъ x, то по силѣ вопроса, цѣна каждаго конца будетъ $\frac{180}{x}$, а естьли бы онъ купилъ $x+3$ конца, то бы цѣна каждаго $\frac{180}{x+3}$ была 3мя рублями меньше; по сей причинѣ $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$, умножь каждую часть уравненія сперва на x, а потомъ на $x+3$, будетъ $180x = 180x - 3x^2 + 540 - 9x$, въ коемъ по перестанвкѣ величинъ изъ одной части въ другую, будетъ $3x^2 + 9x = 540$, раздѣли на 3, выйдетъ $x^2 + 3x = 180$, откуда найдется $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(180 + \frac{9}{4})} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$; слѣдовательно въ первомъ случаѣ $x = 12$, а во второмъ $x = -15$.

Задача XII. Извѣстна сумма чиселъ $= a$, и сумма ихъ квадратовъ $= b$, найти оныя числа.

Рѣшен. I. Положимъ искомыя числа x и y; то произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x + y = a$; II) $x^2 + y^2 = b$; возвысь каждую часть перваго уравненія во вторую степень, будетъ $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, вычти изъ сего уравненія второе, останется $2xy = a^2 - b$; вычти сіе уравненіе изъ втораго, останется $x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a^2$, потомъ извлеки корень квадрата, выйдетъ $x - y = \pm\sqrt{(2b - a^2)}$; придай сіе уравненіе къ первому, а напослѣдокъ оное вычти изъ первагожъ, то въ первомъ случаѣ найдется $x = \frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$, а во второмъ $y = \frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$.

Рѣшен. II. Положимъ разность данныхъ чиселъ $= x$, то будетъ большое число $\frac{a + x}{2}$, меньшое $\frac{a - x}{2}$; и такъ будетъ квадратъ большаго количества $\frac{a^2 + 2ax + x^2}{4}$, а квадратъ меньшаго числа $\frac{a^2 - 2ax + x^2}{4}$, коихъ сумма $\frac{a^2 + x^2}{2} = b$, или $a^2 + x^2 = 2b$, гдѣ $x^2 = 2b - a^2$ а по извлеченіи квадратнаго корня найдется $x = \pm\sqrt{(2b - a^2)}$; и такъ большое число будетъ $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2}$, а меньшее $\frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$. Пусть будетъ $a = 11$, $b = 65$, то будетъ $x = \pm\sqrt{(130 - 121)} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. По сему большое число будетъ $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$, а меньшое $5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 4$ *).

За-

*) Посредствомъ сего вопроса разрѣшается Геометрическая задача (§ 178 Часть II).

Задача XIII. Требуется два числа, x и y положительныя, коихъ бы произведеніе было $= a$, а сумма квадратовъ $= b$.

Рѣшен. Въ разсужденіи вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $xx + yy = b$, II) $xy = a$. Удвоенное второе уравненіе придай къ первому, будетъ $xx + 2xy + yy = b + 2a$, а по извлеченіи изъ каждой части квадратнаго корня выйдетъ $x + y = \pm\sqrt{(b + 2a)}$; потомъ удвоенное второе уравненіе вычти изъ перваго, будетъ $xx - 2xy + yy = b - 2a$, котораго квадратные корни обѣихъ частей будутъ $x - y = \pm\sqrt{(b - 2a)}$, сумма сихъ послѣднихъ уравненій будетъ $x + y + x - y$ или $2x = \sqrt{(b + 2a)} + \sqrt{(b - 2a)}$, а по раздѣленіи на 2 найдется $x = \frac{1}{2}\sqrt{(b + 2a)} + \frac{1}{2}\sqrt{(b - 2a)}$; разность же помянутыхъ уравненій будетъ $x + y - x + y$, или $2y = \sqrt{(b + 2a)} - \sqrt{(b - 2a)}$ или $y = \frac{1}{2}\sqrt{(b + 2a)} - \frac{1}{2}\sqrt{(b - 2a)}$. Положимъ $a = 105$, $b = 274$, то найдется $x = \frac{1}{2}\sqrt{484} + \frac{1}{2}\sqrt{64} = 15$, а $xy = 105$, по сему $y = \frac{105}{x} = \frac{105}{15} = 7$.

Примѣчаніе. Въ первомъ рѣшеніи XII Задачи, для сысканія величины x, слагаемо было уравненіе $x - y = \pm\sqrt{(2b - a^2)}$ съ уравненіемъ $x + y = a$; напротивъ того, для изобрѣтенія y одно изъ другаго вычтено; сіе было возможно по той причинѣ, первое, что въ обѣихъ уравненіяхъ знаки величины y суть разные, и притомъ и предстоящіе ихъ одинаки, а во второмъ случаѣ, величину y найти было можно, въ разсужденіи того, что $-x$ уничтожаетъ $+x$; подобное сему и въ XIII Задачѣ произведено.

ведено. По сей причинѣ для уничтоженія одной неизвѣстной буквы въ двухъ уравненіяхъ, имѣющихъ двѣ неизвѣстныя величины съ одинакими предстоящими, учинить можно только тогда, когда въ обѣихъ уравненіяхъ оныя двѣ неизвѣстныя буквы будутъ съ разными знаками; но естьли въ обѣихъ уравненіяхъ одинакія неизвѣстныя величины будутъ съ одинакими знаками, то помянутаго уничтоженія буквъ учинить не можно. Ежели будутъ два уравненія, *на примѣръ* $ax+by=c$, $dx-ny=s$, въ коихъ неизвѣстныя x и y съ разными предстоящими; то для уничтоженія одной буквы, поступать должно такъ: положимъ, что должно уничтожить букву y, то умножь всѣ члены втораго уравненія предстоящимъ b буквы y перваго уравненія, а всѣ члены перваго предстоящимъ n буквы y втораго уравненія; отъ чего произойдутъ два уравненія $anx+bny=nc$, и $bdx-bny=bS$; теперь сложи два сіи уравненія, отъ чего выйдетъ уравненіе $anx+bdx=nc+bS$, въ которомъ находится одна только неизвѣстная буква x. Напротивъ того, ежели бы должно было исключить букву x, то умножа члены втораго уравненія чрезъ a, а члены перваго чрезъ d, вычти второе уравненіе изъ перваго, отъ чего произойдетъ такое уравненіе, въ которомъ будетъ одна только неизвѣстная буква y.

Задача. XIV. Изъ 600 человѣкъ поставленъ строй, такъ что отнявъ 10 рядовъ, выйдетъ еще 2 шеренги; спраш. число людей въ ряду и шеренгѣ.

Рѣшен. Положимъ $600=a$, число людей въ шеренгѣ x, въ ряду y; отъ сего произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $xy=a$, II) $(x-10)2=10y$; раздѣли части втораго уравненія на 2, выйдетъ $x-10=5y$ или $x=5y+10$, а изъ перваго уравненія найдется $x=\frac{a}{y}$; потомъ составя изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ уравненіе $5y+10=\frac{a}{y}$, умножь чрезъ y, будетъ $5y^2+10y=a$, а по раздѣленіи на 5 выйдетъ

y^2

$y^2+2y=\frac{a}{5}$; откуда найдется $y=-1\pm\sqrt{(\frac{a}{5}+1)}$ $=-1\pm\sqrt{121}=10$, и $x=\frac{a}{y}=\frac{600}{10}=60$.

Задача. XV. Найти два числа, коихъ бы произведенiе было $=a$, а разность квадратовъ равна суммѣ чиселъ.

Рѣшен. Положимъ большое число x, меньшое y, то будетъ $xy=a$, гдѣ $x=\frac{a}{y}$, также $x+y=x^2-y^2=(x+y).(x-y)$; раздѣли обѣ части сего уравненiя на $x+y$, выйдетъ $1=x-y$, поставь въ семъ уравненiи на мѣсто x величину $\frac{a}{y}$, будетъ $1=\frac{a}{y}-y$, умножь на y, выйдетъ $y=a-y^2$ или $y^2+y=a$; откуда найдется $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(a+\frac{1}{4})}$. Положимъ $a=132$, то будетъ $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{132\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=11$, а $x=\frac{132}{11}$ $=12$.

Задача XVI. Сыскать два числа, коихъ произведенiе $=a$, а сумма ихъ равна двойной разности искомыхъ чиселъ.

Рѣшен. Положимъ большое количество $=x$, меньшое $=y$, то произойдетъ $xy=a$ и $x+y$ $=(x-y)2=2x-2y$, изъ коихъ въ первомъ будетъ $x=\frac{a}{y}$, а во второмъ найдется $3y=x$; посему $3y=\frac{a}{y}$, умножь на y, будетъ $3y^2=a$, а по раздѣленiи на 3 и по извлеченiи квадратныхъ корней найдется $y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Положимъ, что $a=108$, тогда будетъ $y=\pm\sqrt{\frac{108}{3}}=\pm\sqrt{36}=$ ± 6, а $x=\frac{108}{6}=18$.

Задача. XVII. Найти два числа, коихъ сумма $=a$, а сумма ихъ кубовъ $=b$.

Рѣшен. Пусть меньшое искомое x, то большое будетъ $a-x$, коихъ сумма кубовъ будетъ $a^3-3a^2x+3ax^2-x^3+x^3=b$ или по сокращенiи и перенесенiи членовъ изъ одной части въ другую, выйдетъ $3ax^2-3a^2x=b-a^3$; раздѣли на $3a$, будетъ $x^2-ax=\frac{b-a^3}{3a}$, откуда найдется $x=\frac{a}{2}-\sqrt{(\frac{b-a^3}{3a}+\frac{a^2}{4})}$, а большое число $a-x$ будетъ $=\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{b-a^3}{3a}+\frac{a^2}{4})}$.

Задача XVIII. Найти два числа, коихъ бы разность съ разностiю квадратовъ $=a$, а сумма квадратовъ съ суммою чиселъ была $=b$.

Рѣшен. Положимъ большое число x, меньшое y, то по обстоятельствамъ вопроса произойдутъ слѣдующiя уравненiя: I) $x-y+x^2-y^2=a$ II) $x+y+x^2+y^2=b$; сумма сихъ уравненiй будетъ $2x^2+2x=a+b$, раздѣли на 2, выйдетъ $x^2+x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, откуда найдется $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4})}$. Потомъ вычти первое уравненiе изъ втораго, останется $2y^2+2y=b-a$, раздѣли на 2, выйдетъ $y^2+y=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, откуда найдется $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})}$. Положимъ $a=14$, $b=26$, то будетъ $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{20\frac{1}{4}}=4$, а $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{6\frac{1}{4}}=2$.

Задача. XIX. Требуется два числа, коихъ бы сумма, произведенiе и разность ихъ квадратовъ равны были между собою.

Рѣ-

Рѣшен. Положимъ большое число x, меньшое y, то по обстоятельствамъ вопроса будетъ $x+y=x^2-y^2=(x+y)\times(x-y)$; раздѣли каждую часть сего уравненія на $x+y$, будетъ $1=x-y$, гдѣ $x=1+y$, по сему $x+y=2y+1$ $=x^2-y^2$; равнымъ образомъ и произведеніе xy $=2y+1=(1+y)y=y^2+y$, по сему $y^2+y=2y$ $+1$, а перенеся члены изъ одной части въ другую будетъ $y^2-y=1$, откуда найдется $y=\frac{1}{2}$ $\pm\sqrt{1\frac{1}{4}}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. а $x=1+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Или: положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ x, а половина ихъ разности y, то большое число будетъ $x+y$, а меньшое $x-y$ (123. Зад. IX.); сумма ихъ будетъ $=2x$, произведеніе $(x+y).(x-y)=$ x^2-y^2, а разность ихъ квадратовъ $4xy$. И такъ въ разсужденіи вопроса будетъ $2x=4xy$, раздѣли на $2x$, выйдетъ $1=2y$, гдѣ $y=\frac{1}{2}$; но $x^2-y^2=2x$, по сему $x^2-2x=y^2=\frac{1}{4}$, откуда найдется $x=1\pm\sqrt{1\frac{1}{4}}$ $=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$, слѣдовательно большое число $x+y$ $=\frac{1}{2}+1\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; а меньшое $x-y=-\frac{1}{2}$ $+1\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ тоже, что и прежде.

Задача. XX. Найти два числа, коихъ бы сумма, произведеніе и сумма квадратовъ были равны между собою.

Рѣшен. Положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ x, а половина ихъ разности y, то большое число будетъ $x+y$, а меньшое $x-y$, коихъ сумма $=2x$, произведеніе $(x+y)\times(x-y)$ $=x^2-y^2$, а сумма ихъ квадратовъ $=2x^2+2y^2$.

И такъ въ разсужденіи вопроса будетъ $2x = x^2 - y^2$, или $y^2 = x^2 - 2x$, также и $2x = 2x^2 + 2y^2$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x = x^2 + y^2$, или $x - x^2 = y^2$; по сему для равенства количествъ будетъ $x^2 - 2x = x - x^2$, раздѣли на x выйдетъ $x - 2 = 1 - x$, а перенеся величины изъ одной части въ другую будетъ $2x = 3$, раздѣли на 2, найдется $x = \frac{3}{2}$; по сему $y^2 = x^2 - 2x = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$, а по извлеченіи квадратнаго корня найдется $y = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{+\sqrt{-3}}{2}$; слѣдовательно большое число $x + y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, а меньшое $x - y = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, суть числа мнимыя.

Задача XXI. Найти два числа, коихъ сумма съ произведеніемъ $= a$, а сумма квадратовъ безъ суммы искомыхъ чиселъ $= b$.

Рѣшен. Положимъ искомыя числа x и y, то въ разсужденіи вопроса будетъ I) $x + y + xy = a$, II) $x^2 + y^2 - (x + y) = b$. Пусть будетъ $x + y = z$; и такъ поставя въ обѣихъ уравненіяхъ z вмѣсто $x + y$, будетъ $xy + z = a$, или $xy = a - z$, также $x^2 + y^2 - z = b$, или $x^2 + y^2 = b + z$; къ сему уравненію придай удвоенное предъидущее уравненіе, то есть $2xy = 2a - 2z$, сумма будетъ $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 2a + b - z = z^2$, а перенеся величины изъ одной части въ другую выйдетъ $z^2 + z = 2a + b$, откуда найдется $z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(2a + b + \frac{1}{4})}$. Но какъ $x + y = z$, то будетъ $x = z - y$, также $xy = a - z$, гдѣ $x = \frac{a - z}{y}$;

по-

потомъ составя изъ сихъ двухъ послѣднихъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{a-z}{y} = z - y$, умножь чрезъ y, будетъ $a - z = zy - y^2$, или $y^2 - zy = z - a$, откуда найдется $y = \frac{z}{2} \pm \sqrt{(z - a + \frac{zz}{4})}$; а по симъ извѣстнымъ количествамъ найдется $x = z - y = - \frac{1}{2} \pm \sqrt{(2a + b + \frac{1}{4})} - \frac{z}{2} - \sqrt{(z-a+\frac{1}{4}z^2)}$. Положимъ $a = 34$, $b = 42$, чрезъ что найдется $z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{110\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm 10\frac{1}{2} = 10$, а $y = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{z-a+\frac{1}{4}z^2)} = 5 \pm \sqrt{1} = 5 \pm 1 = 6$, и $x = z - y = 10 - 6 = 4$.

или:

Положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ $= x$, и половина разности ихъ $= y$, то большое количество будетъ $x + y$, а меньшое $= x - y$, сумма ихъ $= 2x$, произведеніе $(x + y) \times (x - y) = x^2 - y^2$, а сумма квадратовъ $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$; и такъ по обстоятельствамъ вопроса будетъ 1) $x^2 - y^2 + 2x = a$, 11) $2x^2 + 2y^2 - 2x = b$; сложи удвоенное первое уравненіе со вторымъ, сумма будетъ $4x^2 + 2x = 2a + b$, раздѣли на 4, выйдетъ $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{2a + b}{4}$, откуда найдется $x = - \frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{2a + b}{4} + \frac{1}{16})}$. Положимъ для краткости сіе извѣстное количество $= n$ и употребимъ оное вмѣсто x, то въ уравненіи $x^2 - y^2 + 2x = a$, будетъ $x^2 + 2x - a = y^2 = n^2 + 2n - a$, а по извлеченіи квадратныхъ корней будетъ $y = \sqrt{(n^2 + 2n - a)}$. И такъ взявъ вмѣсто буквъ извѣстныя количества най-

найдется $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{68 + 42}{4} + \frac{1}{16})} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{441}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{21}{4} = 5$, а $y = \pm \sqrt{(n^2 + 2n - a)} = \pm \sqrt{(35 - 34)} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$; по сему большое число $5 + 1 = 6$, а меньшое $5 - 1 = 4$.

Задача XXII. Найти два числа, коихъ произведеніе равно суммѣ чиселъ, а сумма ихъ квадратовъ съ суммою чиселъ $= 12$.

Рѣшен. Пусть $12 = a$, искомыя числа x и y, то въ разсужденіи вопроса будетъ I) $x + y = xy$, II) $x + y + x^2 + y^2 = a$; возвысь каждую часть перваго уравненія во вторую степень, будетъ $x^2 + y^2 + 2xy = x^2y^2$ или $x^2 + y^2 = x^2y^2 - 2xy$; поставь во второмъ уравненіи xy вмѣсто $x + y$, а $x^2y^2 - 2xy$ вмѣсто $x^2 + y^2$, отъ чего произойдетъ $xy + x^2y^2 - 2xy = a$, или $x^2y^2 - xy = a$; придай къ обѣимъ частямъ сего уравненія квадратъ изъ половины предстоящаго величины xy, то есть $\frac{1}{4}$, выйдетъ $x^2y^2 - xy + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$, а по извлеченіи квадратныхъ корней найдется $xy = + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(a + \frac{1}{4})} = + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$. И такъ написавъ $xy = 4$, найдется $x = \frac{4}{y}$, а изъ перваго уравненія $x + y = xy = 4$, сыщется $x = 4 - y$; теперь составя изъ сихъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{4}{y} = 4 - y$, умножь чрезъ y, выйдетъ $4 = 4y - y^2$ или $y^2 - 4y = -4$, откуда найдется $y = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2 \pm \sqrt{0} = 2$ по сему $x = \frac{4}{y} = \frac{4}{2} = 2 = y$.

или

Положимъ полсуммы искомыхъ чиселъ $= x$, а половина разности $= y$, то большое количество бу-

будетЪ $x + y$, а меньшое $x - y$, сумма ихЪ $=$ $2x$, произведеніе $(x+y)\times(x-y)=x^2-y^2$, а сумма квадратовЪ $(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2$; отЪ сего произойдутЪ слѣдующія уравненія: 1) $x^2 - y^2 = 2x$, II) $2x^2 + 2y^2 + 2x = a$ или $2x^2 + 2y^2 = a - 2x$; сложи сіе уравненіе сЪ удвоеннымЪ первымЪ уравненіемЪ, будетЪ $4x^2=a+2x$, или $4x^2-2x=a$, раздѣли на 4, выйдетЪ $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{a}{4}$, откуда найдется $x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{a}{4}+\frac{1}{16})}=\frac{1}{4} \pm \sqrt{3\frac{1}{16}} = + \frac{1}{4} \pm \frac{7}{4} = 2$; потомЪ изЪ уравненія $x^2 - y^2=2x$ выйдетЪ $x^2-2x=y^2$, вЪ коемЪ поставя 2 вмѣсто x, будетЪ $y^2 = 4 - 4 = 0$, по сему $\sqrt{y^2} = y = 0$; слѣдовательно большое число $x + y = 2 + 0 = 2$, а меньшое $x-y=2-0=2$.

Задача XXIII. Найти два числа x и y, коихЪ произведеніе безЪ квадрата второй величины $=a$, а произведеніе квадрата изЪ первой на вторую безЪ куба второй величины $=b$.

Рѣшен. По обстоятельствамЪ вопроса произойдутЪ слѣдующія уравненія: I) $xy-y^2=a$, II) $yx^2-y^3=b$; или I) $(x-y)y=a$, II) $(x^2-y^2)y=b$, раздѣли сіе уравненіе на первое, частное будетЪ $x+y=\frac{b}{a}$, откуда найдется $x=\frac{b}{a}-y$; поставь сіе количество вЪ первомЪ уравненіи вмѣсто x, будетЪ $(x - y) y=(\frac{b}{a} - y - y) y = (\frac{b}{a} -2y)y=\frac{by}{a}-2y^2=a$, или $by-2ay^2=a^2$, вЪ которомЪ перемѣня знаки вЪ противные, будетЪ $2ay^2-by=-a^2$, раздѣли на $2a$, выйдетЪ $y^2-\frac{by}{2a}=-\frac{a^2}{2a}=-\frac{a}{2}$, откуда найдется $y=\frac{b}{4a}\pm\sqrt{(\frac{b^2}{16}-\frac{a}{2})}$; также и $x=\frac{b}{a}-y=\frac{3b}{4a}-\sqrt{(\frac{b^2}{16}-\frac{a}{2})}$.

Зада-

Задача XXIV. Сыскать три числа x, y и z, изъ коихъ сумма двухъ первыхъ $=b$, произведеніе перваго на второе равно произведенію третьяго чрезъ a, и сумма квадратовъ изъ двухъ первыхъ равна квадрату третьяго.

Рѣшен. Въ разсуденіи вопроса произойдутъ три слѣдующія уравненія: I) $x+y=b$, II) $xy=az$, III) $x^2+y^2=z^2$; умножь части перваго уравненія квадратно, будетъ $x^2+y^2+2xy=b^2$, въ которомъ $x^2+y^2=b^2-2xy$, а поставя въ семъ уравненіи az вмѣсто xy, будетъ $x^2+y^2=b^2-2az$; по сему вторая часть сего уравненія равна второй части третьяго уравненія, то есть $z^2=b^2-2az$ или $z^2+2az=b^2$, въ коемъ найдется $z=-a\pm\sqrt{(b^2+a^2)}$. Но какъ въ первомъ уравненіи $y=b-x$, а во второмъ $y=\frac{az}{x}$; по сей причинѣ будетъ $\frac{az}{x}=b-x$, умножь на x, выйдетъ $az=bx-x^2$, а перемѣня знаки въ противные, будетъ $x^2-bx=-az$, въ которомъ (положа для краткости извѣстную величину $z=n$) найдется $x=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(\frac{b^2}{4}-an)}$, а $y=\frac{1}{2}b-\sqrt{(\frac{b^2}{4}-an)}$.

Задача XXV. Найти три числа x, y и z, коихъ сумма $=a$, произведеніе двухъ первыхъ $=b$, а сумма квадратовъ двухъ первыхъ величинъ равна квадрату изъ третьяго.

Рѣшен. По свойству вопроса произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x+y+z=a$, II) $xy=b$, III) $x^2+y^2=z^2$. Изъ перваго уравненія произойдетъ $x+y=a-z$ (A), а по возвышеніи каждой

части

части во вторую степень будетъ x^2+y^2+2xy $=a^2-2az+z^2$; но какъ $x^2+y^2=z^2$; того ради отнявъ сіи равныя количества отъ обѣихъ частей предъидущаго уравненія, будетъ $2xy=a^2-2az$ $=2b$, или $2az=a^2-2b$, а по раздѣленіи на $2a$ будетъ $z=\frac{aa-2b}{2a}$. Изъ втораго уравненія найдется $y=\frac{b}{x}$; поставь сіе количество въ уравненіи (A) вмѣсто y, будетъ $x+\frac{b}{x}=a-z=a-(\frac{aa-2b}{2a})=$ $\frac{aa+2b}{2a}$; умножь первую и послѣднюю части сего уравненія чрезъ x, будетъ $x^2+b=(\frac{aa+2b}{2a})x$, или $x^2-(\frac{aa+2b}{2a})x=-b$, откуда найдется $x=\frac{aa+2b}{4a}$ $\pm\sqrt{(\frac{aa+2b}{4a})^2-b}$, и $y=\frac{aa+2b}{4a}-\sqrt{(\frac{aa+2b}{4a})-b}$.

Задача. XXVI. Найти два числа x и y, коихъ разность $=b$, а квадратной корень изъ произведенія ихъ $=a$.

Рѣшен. По силѣ вопроса будетъ I) $x-y$ $=b$, II) $\sqrt{xy}=a$; изъ перваго уравненія выйдетъ $x=b+y$, а когда части втораго уравненія возвышены будутъ во вторую степень, то выйдетъ $xy=a^2$, гдѣ $x=\frac{aa}{y}$; по сей причинѣ $b+y=\frac{aa}{y}$, умножь чрезъ y, будетъ $y^2+by=a^2$, откуда найдется $y=-\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2)}$, а x $=\frac{b}{2}\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2)}$.

О рѣшеніи чистыхъ уравненій всѣхъ степеней.

§ 130. Ежели представимъ себѣ уравненіе неопредѣленной степени, *на примѣръ*. $ax^m = bd$; то въ немъ можно заключить всѣ степени уравненія, въ коемъ неизвѣстную величину найти не трудно: ибо раздѣля каждую часть уравненія на a, будетъ $x^m = \frac{bd}{a}$: или положа $\frac{bd}{a} = c$, будетъ $x^m = c$; потомъ когда извлечется изъ каждой части уравненія корень степени m, то найдется $x = \sqrt[m]{c}$. И такъ ежели m будетъ представлять чотное число, то корень сей степени будетъ имѣть предъ собою два знака $\pm$, то есть $+$ или $-$, *на примѣръ*: ежели $m = 4$, то будетъ $x = \pm\sqrt[4]{c}$, и ежели положимъ что $c = 16$, то найдется $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$; изъ сего явствуетъ, что всѣ четыре корня могутъ быть или положительные, либо всѣ отрицательные, или два положительныхъ и два отрицательныхъ. Положимъ что $c = -8$, то будетъ $x = \pm\sqrt[4]{-8}$, котораго всѣ корни суть количества невозможныя (§ 87); но естьли $m = 3$, тогда найдется $x = \sqrt[3]{-8} = -2$; и кромѣ сего корня будутъ еще два другіе или положительные, или мнимые. Тожъ должно разумѣть о корняхъ прочихъ степеней.

При-

Примѣры.

Задача I. Отецъ подарилъ дочери кошелекъ денегъ, коихъ квадратное число ежели умножишь одною четвертью всѣхъ денегъ, то произведеніе будетъ 432; спрашивается число денегъ.

Рѣшен. Пусть будетъ число денегъ въ кошелькѣ x рублей, то по обстоятельствамъ вопроса будетъ $x^2 \times \frac{1}{4}x = 432$, или $\frac{x^3}{4} = 432$, умножь чрезъ 4, будетъ $x^3 = 1728$, а по извлеченіи кубическаго корня найдется $\sqrt[3]{x^3} = x = 12 =$ искомому числу рублей.

Задача II. Требуется такое число x, котораго ежели четвертая степень раздѣлится на половину искомаго числа, и къ частному придастся $14\frac{1}{4}$, то сумма будетъ 100.

Рѣшен. Раздѣли x^4 на $\frac{x}{2}$, частное будетъ $2x^3$, и такъ въ разсужденіи вопроса выйдетъ слѣдующее уравненіе: $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, въ которомъ $2x^3 = 100 - 14\frac{1}{4} = \frac{343}{4}$, а по раздѣленіи на 2 будетъ $x^3 = \frac{343}{8}$, откуда найдется $x = \sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

§ 131. *Прибавлен.* Когда въ уравненіи неизвѣстная величина будетъ четвертой и второй только степени, то оная найдется посредствомъ уравненія второй степени, *на примѣръ*: $x^4 + 2x^2 = 80$; ибо придавъ къ обѣимъ частямъ квадратъ изъ половины предстоящаго величины x^2, будетъ $x^4 + 2x^2 + 1 = 80 + 1 = 81$, потомъ извлеки изъ обѣихъ частей квадратные

корни выйдетъ $x^2+1=\pm\sqrt{81}$, или $x^2=-1\pm\sqrt{81}=-1\pm9=8$; наконецъ извлеки еще квадратные корни, найдется $x=\pm\sqrt{8}$. Ежели уравненіе будетъ $x^4+2x^2=10$, то найдется $x^2=-1\pm\sqrt{11}$, а по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадратныхъ корней будетъ $x=\pm\sqrt{(-1\pm\sqrt{11})}$.

Задача III. Въ уравненіи $\frac{ax^4}{b}-\frac{cx^2}{d}=e$ найти неизвѣстную величину буквы x.

Рѣшен. Умножь каждую часть чрезъ b и d, будетъ $adx^4-bcx^2=bde$, потомъ раздѣли на предстоящее величины x^4, то есть на ad, выйдетъ $x^4-\frac{bcxx}{ad}=\frac{bde}{ad}=\frac{be}{a}$, откуда найдется $x^2=\frac{bc}{2ad}\pm\sqrt[2]{(\frac{be}{a}+\frac{bbcc}{4aadd})}$; а наконецъ извлеки изъ обѣихъ частей квадратные корни, найдется

$$x=\pm\sqrt[2]{\frac{bc}{2ad}\pm\sqrt{(\frac{be}{a}+\frac{bbcc}{4aadd})}}$$

О содержанїяхъ, пропорцїяхъ и прогрессїяхъ.

§ 132. *Опредѣл.* *Содержаніе* есть такое одного количества съ другимъ однороднымъ сношеніе, чрезъ которое познается, какимъ образомъ одно изъ другаго происходитъ.

Ежели разсуждается о разности двухъ количествъ, *на примѣръ* 6 и 2 хъ, тогда такое сношеніе двухъ чиселъ называется *содержаніемъ Ариѳметическимъ*; но ежели разсматривается сколь-

сколько разъ въ первомъ 6, содержится второе 2, такое содержаніе называется *Геометрическимъ*. Первое или сперва написанное изъ двухъ сносимыхъ количествъ именуется *предъидущій*, а второе *послѣдующій* членъ содержанія. Содержаніе Ариѳметическое познается чрезъ вычитаніе одного количества изъ другаго, и для того изображается пристойнѣе знакомъ вычитанія, нежели (какъ то нѣкоторые означаютъ) точкою; *напримѣръ* $6-2=4$, или и вообще $a-b=d$, число 4 или буква d, означающее, чѣмъ одно число больше другаго, именуется *разность содержанія*.

Содержаніе Геометрическое познается чрезъ дѣленіе предъидущаго на послѣдующій, или послѣдующаго на предъидущій, какъ *на примѣръ*: содержаніе 6 къ 2 мъ будетъ $\frac{6}{2}=3$. Число 3, показующее, сколько разъ одно изъ сносимыхъ количествъ содержится въ другомъ, называется *знаменатель* или *показатель* содержанія. Изъ сего видно, что всякая дробь есть Геометрическое содержаніе, котораго предъидущій членъ есть числитель, а послѣдующій знаменатель, и для того содержаніе 6 къ 2 или вообще a къ b можетъ быть изображено чрезъ $\frac{a}{b}$ или знакомъ дѣленія $a:b$

Члены содержанія могутъ быть или равны, или не равны между собою.

§ 133. *Опредѣлен.* Когда члены содержанія равны, тогда такое сношеніе чиселъ именуется *содержаніе равенства*. Содержаніемъ *большаго неравенства* зовется то, въ которомъ предъидущій членъ больше послѣдующаго; а содержаніе

меньшаго неравенства есть то, въ которомъ первый членъ меньше втораго.

§ 134. *Определен.* Равенство двухъ содержаній зовется *пропорціею* или *соразмѣрностію*, *на примѣръ*: два равныя содержанія Ариѳметическія 7—3 и 6—2, или когда $a-b=e$ и $c-d=e$, тогда два такія содержанія составляютъ *пропорцію Ариѳметическую*; которая означается такъ: $7-3=6-2$ и вообще $a-b=c-d$, и словами выговаривается чѣмъ a меньше b, тѣмъ c меньше d. Два равныя Геометрическія содержанія 12 : 6 и 4 : 2, или ежели $a:b=n$, и $c:d=n$ то они составятъ *Геометрическую пропорцію*, которая пишется такимъ образомъ $12:6=4:2$ или $\frac{12}{6}=\frac{4}{2}$, и вообще $a:b=c:d$, и выговаривается a содержится къ b, какъ c къ d.

§ 135. *Определен.* Первой и послѣдній членъ въ Ариѳметической и Геометрической пропорціяхъ именуются *крайними*, а второй и третій *средними* членами.

§ 136. *Определен.* Ежели въ пропорціи Ариѳметической, *на примѣръ* $12-9=9-6$ либо $a-b=b-c$, или въ Геометрической, *на примѣръ* $12:6=6:3$ или $a:b=b:c$ средніе члены одинаки, тогда каждая изъ нихъ именуется *непрерывною*; а тотъ членъ, которой два раза принимается въ сношеніе, какъ-то 9 и 6, называется *средній пропорціональный*.

Для краткости непрерывная Ариѳметическая пропорція означается такъ: $\div$ 12, 9, 6 и вообще $\div$ a, b, c; а Геометрическая пишется

слѣ-

слѣдующимъ образомъ: $\div\!\div$ 12 : 6 : 3 и вообще $\div\!\div$ $a : b : c$.

§ 137. *Слѣдст.* Изъ предъидущихъ предложеній видно, естьли положимъ, что разность содержанія Ариѳметическаго a къ b будетъ $= d$, то оное содержаніе Ариѳметическое $a - b$ вообще изобразиться можетъ такимъ образомъ: $a - a \pm d$: съ знакомъ $+$ изобразится тогда, когда предъидущій членъ a будетъ меньше послѣдующаго, а съ знакомъ $-$, когда предъидущій будетъ больше послѣдующаго; ибо въ содержаніи Ариѳметическомъ 6 къ 4 послѣдующій членъ 4 равенъ предъидущему 6 безъ разности 2, и обратно въ содержаніи 4 къ 6 послѣдующій членъ 6 равенъ предъидущему 4, сложенному съ разностію 2.

§ 138. *Теорема.* Въ пропорціи Ариѳметической сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ членовъ.

Доказательство. Пусть будетъ пропорція $a - b = c - e$, у которой разность содержаній $= d$, то на мѣсто втораго b поставь $a \pm d$, а вмѣсто четвертаго e напиши $c \pm d$; потомъ данную пропорцію изобрази слѣдующимъ образомъ: $a, a \pm d = c, c \pm d$, у которой сумма крайнихъ $a + c \pm d$ равна суммѣ среднихъ $c + a \pm d$; слѣдовательно сумма $a + e = b + c$. Еще легче можно доказать истинну сего предложенія, ежели только представишь себѣ, что a безъ b равно c безъ e, то есть $a - b = c - e$, то придавъ къ каждой части сего уравненія количество b, будетъ $a = b + c - e$, потомъ придай e, будетъ $a + e = b + c$, то есть сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ членовъ.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что въ непрерывной Ариөметической пропорціи, *на примѣръ*, $\div a - b - c$, сумма крайнихъ членовъ равна среднему дважды взятому; поелику помянутая пропорція напишется такимъ образомъ: $a - b = b - c$, но по предъидущему предложенію будетъ $a + c = b + b = 2b$; слѣдовательно сумма крайнихъ вдвое больше средняго.

§ 139. *Задача.* Къ тремъ даннымъ членамъ a, b и c Ариөметической пропорціи найти четвертой.

Рѣшен. Положимъ искомой членъ x, то пропорція будетъ слѣдующая: $a - b = c - x$, у которой $a + x = b + c$ (§ 138); вычти изъ каждой части количество a, останется $x = b + c - a$, то есть, сумма втораго съ третьимъ безъ перваго члена, равна четвертому Ариөметическому члену.

Слѣдств. I. Подобнымъ сему порядкомъ найдется всякой членъ Ариөметической пропорціи, *на примѣръ*: ежели потребно будетъ найти второй членъ, то пропорція изобразится такъ: $a - x = b - c$, гдѣ $b + x = a + c$, вычти изъ каждой чаждой части b, останется $x = a + c - b$, то есть, сумма перваго съ послѣднимъ безъ третьяго равна второму. Естьлижъ потребенъ будетъ въ пропорціи Ариөметической первой членъ, то представя себѣ пропорцію $x - a = b - c$, будетъ $x + c = a + b$, откуда найдется $x = a + b - c$, то есть сумма втораго съ третьимъ безъ послѣдняго равна первому члену.

Слѣдств. II. Изъ сего видно, что средній пропорціональный членъ непрерывной Ариөметической про-

пропорціи между a и b равенъ будетъ полсуммѣ крайнихъ a и b; ибо положимъ требуемой членъ $=x$, то будетъ $\div a-x-b$, гдѣ $a+b=2x$ (§ 138. *Слѣдств.*), а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $x=\frac{a+b}{2}$. Естьлижъ потребенъ будетъ третій членъ, то пропорція будетъ $\div a-b-x$, у которой $a+x=2b$, вычти изъ обѣихъ частей уравненія количество a, найдется $x=2b-a$, то есть, третій членъ непрерывной Ариѳметической пропорціи равенъ дважды взятому среднему члену безъ перваго; и обратно первой членъ сыщется, когда изъ средняго, дважды взятаго, вычтется третій членъ.

О прогрессіи Ариѳметической.

§ 140 *Опредѣл.* Ежели непрерывная Ариѳметическая пропорція будетъ имѣть больше трехъ членовъ, такъ что послѣдующій членъ каждаго содержанія будетъ равенъ предъидущему послѣдующаго содержанія, такой рядъ чиселъ именуется *прогрессіею Ариѳметическою*, какъ *на примѣръ*, $\div 3-5=5-7=7-9=9-11$ и проч. или $\div a-b=b-c=c-d=d-e$ и проч. Ариѳметическая прогрессія для сокращенія выражается такимъ образомъ: $\div$ 3,5,7,9,11 и проч. и вообще $\div$ a,b,c,d,e и проч.

§ 141. *Опредѣл.* *Прогрессія возрастающая* именуется та, у которой члены одинъ послѣ другаго увеличиваются, какъ *на примѣръ*: $\div$ 3,5,7,9,11 и проч; напротивъ того *прогрессія убывающая* есть та, у которой члены одинъ

послѣ другаго уменьшаются, какъ *на примѣръ*: ÷ 13, 10, 7, 4, 1.

Слѣдст. Изъ сего видно, что прогрессія Ариѳметическая есть рядъ чиселъ, у которыхъ между каждыми двумя сряду стоящими членами разность одинакая.

Примѣчан. Прогрессія Ариѳметическая можетъ начинаться и отъ нуля, какъ-то ÷ 0, 2, 4, 6, 8, и проч.

§ 142. *Задача.* Извѣстна разность d, и первой членъ a, составить прогрессію до нѣсколькихъ членовъ.

Рѣшен. Поелику въ Ариѳметической прогрессіи каждыхъ двухъ сряду стоящихъ членовъ разность одинакая, того ради въ возрастающей прогрессіи каждой послѣдующій членъ равенъ предъидущему сложенному съ разностію; а въ убывающей каждой послѣдующій членъ равенъ предъидущему безъ разности; слѣдственно вообще такія прогрессіи изобразятся слѣдующимъ образомъ ÷ a, $a \pm d$, $a \pm 2d$, $a \pm 3d$, $a \pm 4d$, $a \pm 5d$ и проч. то есть, ежели положимъ $a = 1$, $d = 2$, то прогрессія возрастающая будетъ ÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11 и проч. естьлижъ будетъ $a = 15$, то убывающая прогрессія будетъ слѣдующая ÷ 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

Слѣдст. Изъ сего видно, что въ возрастающей Ариѳметической прогрессіи каждой членъ равенъ первому члену, сложенному съ произведеніемъ изъ разности прогрессіи на число предъидущихъ членовъ, какъ *на примѣръ*: шестой членъ предложенной прогрессіи $= a + d \times 5$ или $a + 5d$; по сей причинѣ ежели положимъ число членовъ n, то будетъ послѣдній членъ Ариѳметической прогрессіи $x = a$

$+(n-1)d$. И такъ естьли будетъ первой членъ $a=1$, разность $d=3$, число членовъ $n=7$, то будетъ седьмой членъ $x=1+(7-1).3=1+18=19$.

§ 143. *Теорема.* Въ прогресіи Ариѳметической, сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ двухъ другихъ, въ равномъ разстояніи отъ нихъ находящихся.

Доказательство. Пусть будетъ прогресія $\div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d$. Поелику разность между первымъ и другимъ какимъ нибудь членомъ, также между послѣднимъ крайнимъ и другимъ, отъ него въ такомъ же разстояніи находящимся, пребудетъ всегда одинака; то въ разсужденіи сего два первые члена и два послѣдніе, находящіеся въ одинакомъ разстояніи, составляютъ Ариѳметическую пропорцію, то есть $a-(a+d)=a+5d-(a+6d)$, у которой сумма крайнихъ членовъ $2a+6d$ равна суммѣ среднихъ $2a+6d$. Равнымъ образомъ сумма третьяго и пятаго членовъ, будетъ также $a+2d+a+4d=2a+6d$.

Слѣдст. Изъ сего видно, что какой нибудь средній членъ Ариѳметической прогрессіи равенъ половинѣ суммы двухъ другихъ, въ равномъ разстояніи отъ него находящихся, *на примѣръ*: 4 й членъ равенъ половинѣ суммы втораго и шестаго члена, то есть $a+3d=\frac{a+d+a+5d}{2}=\frac{2a+6d.}{2}$

§ 144. *Теорема.* Въ прогрессіи Ариѳметической сумма всѣхъ членовъ равна произведенію

изъ суммы крайнихъ на половину числа членовъ.

Доказательство. Составя прогрессію, напиши подъ оною тужe самую обратно; потомъ члены ихъ сложи порознь, какъ изъ слѣдующаго видно:

$$\begin{array}{ccccccc} a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, \\ a+6d, & a+5d, & a+4d, & a+3d, & a+2d, & a+d, & a \\ \hline 2a+6d, & 2a+6d, & 2a+6d, & 2a+6d, & 2a+6d, & 2a+6d, & 2a+6d \end{array}$$

то полсуммы сихъ равныхъ членовъ будетъ равна суммѣ всей предложенной прогрессіи, слѣдовательно естьли одинъ какой нибудь изъ сихъ членовъ умножится чрезъ число членовъ, и произведеніе раздѣлится на двѣ ровныя части, то частное будетъ равно суммѣ прогрессіи, то есть сумма прогрессіи будетъ $= (\frac{2a+6d}{2}) \times 7 = (2a + 6d).\frac{7}{2}$, но $\frac{7}{2}$ есть половина суммы членовъ, а $2a+6d$ равно суммѣ крайнихъ членовъ, слѣдовательно сумма прогрессіи равна произведенію изъ суммы крайнихъ, на половину числа членовъ. И такъ положимъ, что сумма прогрессіи $= S$, первой членъ $= a$, послѣдній $= x$, число членовъ n, то будетъ сумма прогрессіи $S = (a+x)\frac{n}{2} = \frac{na+nx}{2}$.

Слѣдст. Изъ того удобно можно видѣть, ежели положимъ разность прогрессіи $= d$, то будетъ послѣдній членъ $x = a+(n-1).d$ (§ 142. Слѣд.), а сумма прогрессіи $S = [2a+(n-1)d].\frac{n}{2} = \frac{2an+(n-1)dn}{2}$. И такъ ежели прогрессія будетъ составлена изъ естественныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, и проч. гдѣ первой членъ $a=1$ и разность $d=1$, то

то будетъ сумма прогрессіи $S = \frac{2n + (n-1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$. Когда такая прогрессія будетъ начинаться отъ 0, какъ-то 0, 1, 2, 3, 4 и прочая, то будетъ послѣдній членъ $x = 0 + (n-1) \times 1 = n-1$; посему сумма прогрессіи $S = (0+n-1)\frac{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.
Положимъ что $a = 1$, а разность $d = 2$, тогда послѣдній членъ $a + (n-1)d$ будетъ $= 1 + (n-1)2 = 2n-1$, а сумма прогрессіи $S = \frac{2an + (n-1)dn}{2} = \frac{2n + (n-1)2n}{2} = nn$, то есть сумма прогрессіи нечотныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7, 9 и проч. равна квадрату изъ числа членовъ.

Задача I. Извѣстны послѣдній членъ, число членовъ и разность, найти первой членъ и сумму Ариѳметической прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ первой членъ $= x$, послѣдній $= c$, число членовъ $= n$, разность $= d$, то будетъ $c = x + (n-1)d$ (§ 142. *Слѣд.*), откуда найдется $x = c - (n-1)d = c - nd + d$; потомъ умножь сумму перваго съ послѣднимъ чрезъ половину числа членовъ, выйдетъ сумма прогрессіи $S = (2c - nd + d)\frac{n}{2}$.

Задача II. Извѣстенъ первой и послѣдній члены и число членовъ, найти разность прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ, первой членъ $= a$, послѣдній $= b$, число членовъ $= n$, а разность $= x$, то будетъ $b = a + (n-1)x$, или $b - a = (n-1)x$, раздѣли каждую часть на $n-1$, найдется $x = \frac{b-a}{n-1}$.

За-

Задача III. Число 40 раздѣлить на 5 частей такъ, чтобы каждая послѣдующая часть превышала свою предъидущую 3 мя.

Рѣшен. Поелику въ семъ вопросѣ 40 есть сумма прогрессіи, 5 число членовъ, 3 разность. И такъ положимъ, первой членъ x, то послѣдній будетъ $=x+(5-1).3=x+12$, а сумма прогрессіи $40=(2x+12).\frac{5}{2}=5x+30$, гдѣ $40-30=5x$ или $10=5x$; раздѣли на 5, найдется $x=2=$ первой части, и такъ искомыя части будутъ слѣдующія 2, 5, 8, 11, 14, коихъ сумма $=40$.

Задача. IV. Извѣстна сумма прогрессіи, число членовъ и послѣдній членъ, сыскать разность.

Рѣшен. Положимъ сумма прогрессіи S, число членовъ n, послѣдній членъ b, первой членъ x, разность y, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $b=x+(n-1)y$ (§ 142), II) $(b+x)\frac{n}{2}=S=\frac{nb+nx}{2}$ (§ 144); умножь обѣ части сего уравненія чрезъ 2, будетъ $2S=nb+nx$, откуда найдется $x=\frac{2S-nb}{n}$; поставь сію величину въ первомъ уравненіи вмѣсто x, будетъ $b=\frac{2S-nb}{n}+(n-1)y$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $b-(\frac{2S-nb}{n})$ или $\frac{nb-2S+nb}{n}=(n-1)y=\frac{2nb-2S}{n}$, откуда найдется $y=\frac{2nb-2S}{n(n-1)}$.

Задача. V. Между двухъ данныхъ членовъ a и b вставить число среднихъ n.

Рѣше-

Рѣшен. Когда положимъ разность x, то число членовъ будетъ $n+2$, а послѣдній членъ $b=a+(n+1)x$ или $b-a=(n+1)x$, откуда найдется $x=\frac{b-a}{n+1}$. И такъ придай сію разность къ первому члену a, получишь второй членъ, то есть первой средній; а когда къ сему члену придастся помянутая разность, то найдется третій членъ и такъ далѣе (§ 142), отъ чего произойдетъ слѣдующая прогрессія:

$$\div a, a+(\frac{b-a}{n+1}), a+2(\frac{b-a}{n+1}), a+3(\frac{b-a}{n+1})+\ldots\ldots b.$$

Положимъ, что $a=3$, $b=15$, $n=3$, то будетъ разность $x=\frac{b-a}{n+1}=\frac{12}{4}=3$, чрезъ что составится прогрессія $\div 3, 6, 9, 12, 15$.

Задача VI. Нѣкто покупаетъ коня, платитъ по условію за первой подковной гвоздь 5 коп. за другой 8 коп. и такъ далѣе за каждой 3 мя копѣйками больше; гвоздей же всѣхъ было 32; найти цѣну коня.

Рѣшен. Здѣсь въ разсужденіи вопроса первой членъ есть $5=a$, разность $3=b$, число членовъ $32=c$, а сумма прогрессіи есть цѣна коня $=x$; по сему послѣдній членъ будетъ $=a+(c-1).b=a+bc-b$, а сумма прогрессіи или цѣна коня $x=(a+a+bc-b)\times\frac{1}{2}c=(2a+bc-b).\frac{1}{2}c$ $=103\times16=1648$ или 16 рубл. 48 коп.

Задача VII. Сыскать число, состоящее изъ трехъ знаковъ, составляющихъ Ариѳметическую прогрессію; которое ежели раздѣлится на сумму знаковъ, то выйдетъ 48, а когда изъ онаго вычтется 198, то разность будетъ такое чи-

сло, которое произойдетъ отъ перестaвки знаковъ съ правой руки на лѣво, а съ лѣвой на право.

Рѣшен. Положимъ, что первой знакъ съ лѣвой руки, то есть сотни, содержитъ въ себѣ x единицъ, разность помянутыхъ знаковъ y единицъ, то второй членъ будетъ $x+y$, а третей $x+2y$. Но какъ первой членъ есть сотни, второй десятки, того ради будетъ первой членъ $=100x$, второй $=10x+10y$; по сему сумма всѣхъ трехъ членовъ $=100x+10x+10y+x+2y=111x+12y$; а когда поставится на мѣстѣ перваго третій, а на мѣстѣ третьяго первый, то будетъ первый членъ содержать въ себѣ единицъ $100x+200y$, второй $10x+10y$, а третій x, коихъ сумма $=111x+210y$; суммажъ трехъ знаковъ $=3x+3y$. И такъ произойдутъ слѣдующія уравненія I) $\frac{111x+12y}{3x+3y}=\frac{37x+4y}{x+y}=48$, или $37x+4y=48x+48y$ (по умноженіи на $x+y$), II) $111x+12y+198=111x+210y$, въ коемъ по перестaвкѣ членовъ будетъ $111x-111x-198=210y-12y$, или $-198=198y$, а раздѣля обѣ части на 198, найдется $y=-\frac{198}{198}=-1$; въ первомъ же уравненіи $37x+4y=48x+48y$, по перестaвкѣ величинъ будетъ $-44y=11x$, а по раздѣленіи на 11, выйдетъ $-4y=x$, въ коемъ поставя -1 на мѣсто y найдется $x=-4\times-1=4=$ первому знаку требуемаго числа, по сему второй знакъ $x+y=4-1=3$, третей $x+2y=4-2=2$, слѣдовательно искомое число $=432$; которое ежели раздѣлится на сумму знаковъ 9, то частное $\frac{432}{9}=48$, также $432-198=234$. За-

Задача VIII. Нѣкто, будучи въ пути, заплатилъ за первую версту 3 коп. за другую 5 коп. за третью 7 коп. и такъ далѣе за каждую версту 2 мя копѣйками больше; а наконецъ нашлось, что всѣхъ денегъ во время проѣзда издержено 10 рубл. 88 коп. спрашивается число верстъ.

Рѣшен. Въ семъ вопросѣ будетъ первой членъ $3 = a$, разность прогрессіи $2 = n$, и сумма прогрессіи $1088 = S$. И такъ положа число членовъ x, будетъ послѣдній членъ $= a + (x - 1)n = a + nx - n$, по сему сумма прогрессіи $S = (2a + nx - n) . \frac{x}{2} = \frac{nx^2 + 2ax - nx}{2}$ (§ 144), а по умноженіи на 2 выйдетъ $nx^2 + 2ax - nx = 2S$; раздѣли на n, будетъ $x^2 + (\frac{2a - n}{n}) . x = \frac{2S}{n}$, откуда найдется $x = - \frac{2a - n}{2n} \pm \sqrt{\frac{2S}{n} + (\frac{2a - n}{2n})^2} = - 1 \pm \sqrt{1089} = - 1 \pm 33 = 32$ искомое число верстъ.

Задача. IX. *Дана разность n, послѣдній членъ c, и сумма прогрессіи S, найти первой членъ и число членовъ.*

Рѣшен. Положимъ первой членъ x, число членовъ y, то въ разсужденіи свойства Ариѳметической прогрессіи будетъ послѣдній членъ $c = x + (y - 1)n = x + ny - n$, а сумма прогрессіи $S = (x + c)\frac{1}{2}y$. И такъ изъ перваго уравненія найдется $x = c + n - ny$, а во второмъ $S = (x + c)\frac{y}{2}$ умножь каждую часть на 2, будетъ $2S = (x + c)y = xy + cy$, въ которомъ по перенесеніи членовъ выйдетъ $xy = 2S - cy$, а по раздѣленіи на y, найдется $x = \frac{2S - cy}{y} = c + n - ny$; умножь каждую изъ сихъ частей на y, будетъ $2S - cy = cy + ny - ny^2$, въ коемъ по перенесеніи членовъ

новъ изъ одной части въ другую, будетъ $ny^2 - ny - 2cy = -2S$; раздѣли на n, выйдетъ $y^2 - (\frac{n+2c}{n})y = -\frac{2S}{n}$, откуда найдется $y = \frac{n+2c}{2n} \pm \sqrt{(\frac{n+2c}{2n})^2 - \frac{2S}{n}}$; а по извѣстному y найдется и величина x.

Задача. X. *Найти четыре числа Ариѳметической прогрессіи, коихъ произведеніе крайнихъ $= b$, а произведеніе среднихъ $= a$.*

Рѣшен. Положимъ первой членъ x, а разность y, то будетъ прогрессія слѣдующая: $\div x$, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, у которой произведеніе крайнихъ $(x+3y)x = x^2 + 3yx = b$, а произведеніе среднихъ $(x+2y)\times(x+y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = a$; вычти первое уравненіе изъ сего послѣдняго, останется $2y^2 = a - b$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $y^2 = \frac{a-b}{2}$, откуда найдется $y = \sqrt{(\frac{a-b}{2})}$; поставь сіе количество въ первомъ уравненіи на мѣсто y, будетъ $x^2 + 3xy = x^2 + 3x\sqrt{(\frac{a-b}{2})} = b$, гдѣ найдется $x = -\frac{3}{2}\sqrt{(\frac{a-b}{2})} \pm \sqrt{b + \frac{9}{4}(\frac{a-b}{2})}$; чрезъ что составится требуемая прогрессія.

О пропорціи и прогрессіи Геометрической.

§ 145. Предъ симъ уже объявлено, что содержаніе Геометрическое познается чрезъ дѣленіе предъидущаго члена на послѣдующій. И такъ ежели положимъ, что предъидущій членъ a, послѣдующій b, а знаменатель содержанія d, то будетъ $a : b = d$ или $\frac{a}{b} = d$, гдѣ $a = bd$, то есть предъидущій членъ a равенъ произведенію изъ послѣдующаго и знаменателя содержанія.

§ 146. *Теорема.* Во всякой пропорціи Геометрической произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ. *Дока-*

Доказат. I. Пусть будетъ пропорція $a:b = c:d$, въ которой будетъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§ 134). И такъ умножь каждое изъ сихъ количествъ прежде на b, будетъ $a = \frac{bc}{d}$, потомъ умножь на d выйдетъ $ad = bc$ (*Часть* I § 35).

II. Положимъ, что знаменатель содержанія будетъ q, то по предъидущему предложенію будетъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, при чемъ $a = bq$, и $c = dq$ (§ 145). И такъ поставь въ предложенной пропорціи bq на мѣсто a, а dq на мѣсто c, отъ чего данная пропорція перемѣнится въ слѣдующую: $bq : b = dq : d$, въ которой произведеніе крайнихъ bdq = произведенію среднихъ bdq, то есть $ad = bc$; примѣръ сей пропорціи есть слѣдующій: $6:3 = 8:4$, гдѣ также $6 \times 4 = 8 \times 3 = 24$.

Слѣдст. Изъ сей теоремы удобно можно видѣть, что въ непрерывной Геометрической пропорціи $\div a:b:c$ произведеніе крайнихъ равно квадрату средняго члена, то есть $ac = b^2$; потому что показанная непрерывная пропорція можетъ быть изображена такимъ образомъ: $a:b = b:c$ (§ 136), въ которой $ac = bb = b^2$. Примѣръ сей пропорціи есть слѣдующій: $\div 18:6:2$, гдѣ также будетъ $18 \times 2 = 36 = 6^2 = 6 \times 6$. Изъ сего явствуетъ, что въ непрерывной Геометрической пропорціи средній членъ $b = \sqrt{ac}$, то есть равенъ квадратному корню изъ произведенія крайнихъ членовъ.

§ 147. *Теорема.* Ежели четыре величины, *на примѣръ*, a, b, c, d будутъ такъ разположены,

что произведеніе крайнихъ ad равно произведенію среднихъ bc, то такія величины будутъ Геометрически пропорціональны.

Доказат. Поелику когда $ad = bc$, то раздѣляя каждую часть сперва на b, будетъ $\frac{ad}{b} = c$; потомъ раздѣля на d, выйдетъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то есть знаменатели содержанія равны, и слѣдовательно составляютъ Геометрическую пропорцію $a:b = c:d$.

Слѣдст. I. Изъ сего видно, ежели изъ четырехъ какихъ нибудь количествъ докажется, что произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то оныя величины составляютъ Геометрическую пропорцію. На семъ-то утверждается все основаніе пропорціи.

Слѣдств. II. Изъ сего удобно можно видѣть, что изъ всякихъ двухъ равныхъ произведеній произойдетъ Геометрическая пропорція, на примѣръ, когда $ac = mn$, то будетъ одинъ какой нибудь множитель первой части содержаться къ какому нибудь множителю другой части, какъ другой множитель второй части ко второму множителю первой части, то есть $a : m = n : c$ или $c : m = n : a$ и прочая.

Слѣдств. III. Изъ сего явствуетъ, что изъ произведенія ab выйдетъ слѣдующая пропорція: $1 : a = b : ab$, то есть единица къ множителю, какъ множимое къ произведенію; также изъ частнаго $\frac{a}{n}$, произойдетъ пропорція $a : n = \frac{a}{n} : 1$, то есть дѣлимое къ дѣлителю, какъ

частное къ единицѣ; поелику въ каждой изъ сихъ пропорцій произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ, какъ-то въ первой $ab = ab$, во второй $1 . a = \frac{an}{n} = a$.

Примѣчан. Изъ предъидущихъ предложеній видно, что изъ всякой дроби можно составить Геометрическую пропорцію, въ которой первымъ членомъ будетъ знаменатель, а средними множители числителя, на примѣръ: ежели дробь $\frac{ad}{n}$, то будетъ $n : a = d : \frac{ad}{n}$; также изъ дроби $\frac{6}{4} = \frac{2 . 3}{4}$, произойдетъ слѣдующая пропорція: $4 : 3 = 2 : \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Изъ дроби $\frac{2}{5} = \frac{1 . 2}{5}$ будетъ $5 : 1 = 2 : \frac{2}{5}$.

§ 148. *Теорема.* Изъ пропорціи Геометрической, на примѣръ $a : b = c : d$, произойдутъ различныя перемѣны, составляя также Геометрическую пропорцію.

На примѣръ:

перемѣняя члены будетъ $a : c = b : d$

обращая - - - $b : a = d : c$

слагая - - $\begin{cases} a+b : b = c+d : d \\ a+a : b = c+c : d \\ a : a+b = c : c+d \\ a : b+b = c : d+d \end{cases}$

вычитая - - - $\begin{cases} a-b : b = c-d : d \\ a : a-b = c : c-d \end{cases}$

Доказательство. Поелику въ каждой изъ сихъ пропорцій произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ; ибо въ положенной Геометрической пропорціи $a:b = c:d$, будетъ $ad = bc$ (§ 146.): посему въ первой и второй пере-

перемѣнной пропорціи будетъ произведеніе ad $=bc$; въ первой пропорціи изъ слагаемыхъ также произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, то есть $ad+db=bc+db$; ибо $ad=bc$ по положенной пропорціи, и $bd=bd$, посему помянутыя два произведенія равны между собою. Въ третьей пропорціи той же перемѣны будетъ $ac+ad=ac+bc$; потому что $ad=bc$. Во второй и четвертой перемѣнѣ произведеніе $2ad=2bc$; ибо $ad=bc$. Въ вычетной же первой пропорціи будетъ произведеніе $ad-bd=bc-bd$, поелику $ad=bc$ и $-bd=-bd$. Во второй пропорціи той же перемѣны будетъ $ac-ad=ac-bc$, по той же причинѣ, что $-ad=-bc$ и $ac=ac$.

§ 149. *Теорема.* Ежели въ пропорціи Геометрической $a:b=c:d$ предъидущіе или послѣдующіе члены, также члены перваго содержанія либо втораго, умножатся или раздѣлятся на какое нибудь количество, то произведенія также и частныя ихъ будутъ Геометрически пропорціональны, какъ *на примѣръ*:

I. $am:b=cm:d$. IV. $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$.

II. $am:bm=c:d$. V. $a:bm=c:dm$.

III. $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=c:d$. VI. $a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}$.

Доказательство. Поелику во всякой изъ сихъ пропорціи произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ, какъ-то изъ дѣйствія первой, второй и пятой пропорціи будетъ $adm=bcm$, а въ прочихъ $\frac{ad}{m}=\frac{bc}{m}$; ибо въ положенной пропорціи $a:b=c:d$ будетъ $ad=bc$,

по-

посему $ad \times m = bc \times m$, также и $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$ (*Часть* I. § 35 и 36).

Слѣдств. Равнымъ образомъ, ежели предъидущіе и послѣдующіе, или члены перваго и втораго содержанія, умножатся или раздѣлятся на какое нибудь количество, то произведенія или частныя ихъ будутъ пропорціональны, *на примѣръ*:

ежели $a : b = c : d$, то будетъ

I. $am : bn = cm : dn$. III. $am : bm = cn : dn$.

II. $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$. IV. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

Потому что въ каждой изъ сихъ пропорціи произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ, то есть первой и третій пропорціи будетъ $admn = bcmn$; ибо въ разсужденіи взятой пропорціи $ad = bc$ и $mn = mn$; а во второй и четвертой произведеніе $\frac{ad}{mn} = \frac{bc}{mn}$; потому что $ad = bc$ и $mn = mn$ (*Часть* I. § 35 и 36).

§ 150. *Опредѣлен. Пропорція прямая* именуется та, у которой первой членъ во столько разъ больше или меньше втораго, во сколько разъ третій больше или меньше четвертаго, какъ *на примѣръ* $6 : 18 = 4 : 12$. Но ежели первой членъ во столько разъ больше или меньше втораго, во сколько разъ третій меньше или больше четвертаго, такая пропорція именуется *обратная*, какъ *на прим.* $6 : 18 = 12 : 4$. И такъ когда пропорція $a : b = c : d$ прямая, то $a : b = d : c$ будетъ обратная.

§ 151. *Теорема.* Ежели двѣ дроби съ разными знаменателями будутъ имѣть одинакихъ числителей, то оныя будутъ въ обратномъ содержаніи своихъ знаменателей, то есть первая дробь ко второй, какъ второй знаменатель къ первому; какъ *на примѣръ*:

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{n} = n : b$$

Доказател. Истинна сего предложенія видна изъ того, что произведеніе крайнихъ членовъ $\frac{ab}{b} = a$, равно произведенію среднихъ $\frac{an}{n} = a$.

Прибавлен. Ежели двѣ дроби будутъ имѣть одинакихъ знаменателей и разныхъ числителей, то оныя будутъ содержаться между собою, какъ ихъ числители, *на примѣръ*: $\frac{a}{n} : \frac{c}{n} = a : c$; потому что произведеніе крайнихъ $\frac{ac}{n} = \frac{ac}{n}$ произведенію среднихъ.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что одинакія части цѣлыхъ содержатся между собою, какъ ихъ цѣлыя, и обратно цѣлыя содержатся между собою, какъ ихъ одинакія части, какъ *на примѣръ* $\frac{a}{7} : \frac{c}{7} = a : c$, и $a : c = \frac{a}{7} : \frac{c}{7}$.

§ 152. *Опредѣлен.* Когда предъидущіе и послѣдующіе члены нѣсколькихъ содержаній умножатся между собою, тогда такое содержаніе именуется сложное, *на примѣръ*: ежели члены содержанія $a : b$ или $\frac{a}{b}$ умножатся членами другаго

таго содержанія $c:d$ или $\frac{c}{d}$, то произведенія ихъ $ac:bd$, или $\frac{ac}{bd}$ будетъ содержаніе сложное изъ двухъ содержаній $a:b$ и $c:d$ или $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Ежели . . . $a:b=c:d$
и . . . . . $e:i=d:q$
$h:s=q:x$,

то будетъ $aeh:bis=cdq:dqx$, а по раздѣленіи членовъ втораго содержанія на dq, будетъ $aeh:bis=c:x$; при чемъ и говорится, что величина c къ x въ сложномъ содержаніи величинъ $a:b$, $e:i$ и $h:s$.

Прибавлен. Ежели сложное содержаніе произойдетъ отъ двухъ равныхъ содержаній, тогда такое содержаніе называется двойное или квадратное; а когда отъ трехъ, тройное или кубическое; отъ четырехъ равныхъ содержаній четверное и проч. какъ *на примѣръ*:

$a:b$ | $a:b$
$a:b$ | $a:b$
$a^2:b^2$ двойное или квадратное | $a:b$
 | $a^3:b^3$, тройное или кубическое.

Слѣдовательно квадратное или двойное, кубическое или тройное содержаніе произходитъ отъ ихъ корней; ибо содержаніе $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$.

И такъ ежели $a:b=c:d$
и $b:e=c:d$

то будетъ $ab:eb=c^2:d^2$, а по раздѣленіи на b, будетъ $a:e=c^2:d^2$; при чемъ и го-

ворится, что $a : e$ въ удвоенномъ содержаніи, или содержатся между собою какъ квадраты величинъ c и d.

§ 153. *Теорема.* Ежели члены одной пропорціи умножатся или раздѣлятся на сходственные члены другой пропорціи, то произведенія и частныя ихъ будутъ пропорціональны.

Доказательств. Пусть будутъ взяты слѣдующія пропорціи, изъ коихъ подписавъ одну подъ другую учинено помянутое въ предложеніи дѣйствіе, то отъ того произшедшія какъ произведенія, такъ и частныя, составляютъ Геометрическія пропорціи; ибо въ каждой изъ нихъ произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ; потому что въ первой изъ предложенныхъ пропорціи будетъ $ad = bc$, во второй $qn = hm$, по сей причинѣ, ежели ad умножится чрезъ qn, а bc чрезъ hm, то будетъ $adqn = bchm$ (Часть I. § 35.); а во второй пропорціи $\frac{ad}{qn} = \frac{bc}{hm}$, (Часть I. § 36).

$$a : b = c : d$$
$$q : h = m : n$$
$$aq : bh = cm : nd$$
$$\frac{a}{q} : \frac{b}{h} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$$

Слѣдств. Изъ сего видно, ежели и больше двухъ пропорцій сходственные члены умножатся между собою, то произведенія ихъ будутъ Геометрически пропорціональны; поелику докажется, что произведеніе крайнихъ, равно произведенію среднихъ.

§ 154. *Теорема.* Ежели будетъ рядъ равныхъ Геометрическихъ содержаній, то будетъ сумма предъидущихъ содержаться къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ какой нибудь предъидущій къ своему послѣдующему.

Дока-

Доказательство. Пусть будетъ рядъ равныхъ содержаній слѣдующій: $a:b=c:d=e:h=x:m$, то будетъ $a+c+e+x:b+d+h+m=a:b$ или $c:d$ и проч.; ибо въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ $ab+bc+be+bx=ab+ad+ah+am$: поелику $cb=ab$, также въ разсужденіи равенства содержаній въ пропорціи $a:b=c:d$ будетъ $ad=bc$; въ пропорціи $a:b=e:h$, произведеніе $ah=be$; и напослѣдокъ въ пропорціи $a:b=x:m$, будетъ $am=bx$; слѣдовательно и суммы сихъ равныхъ произведеній равны между собою. Помянутая пропорція зовется *складная*.

§ 155. *Теорема.* Ежели три количества a, b, c пропорціональны будутъ другимъ d, h и q, то есть что $a:b=d:h$ и $b:c=h:q$, то будетъ $a:c=d:q$.

Доказательство. Ибо въ первой пропорціи произведеніе $ah=bd$, а во второй произведеніе $bq=ch$, по сей причинѣ будетъ $ah:bd=ch:bq$, естьлижъ предъидущіе члены сей пропорціи раздѣлятся на h, а послѣдующіе на b, то будетъ $a:d=c:q$, или $a:c=d:q$ (§ 148).

§ 156. *Теорема.* Ежели въ двухъ пропорціяхъ $a:b=c:d$ и $a:h=q:d$ крайніе члены равны, то вторые члены будутъ въ обратномъ содержаніи съ третьими, то есть $b:h=q:c$.

Доказательство. Справедливость сего видна изъ того, что произведеніе крайнихъ bc равно произведенію среднихъ qh; ибо въ первой изъ предложенныхъ пропорцій $bc=ad$, а во второй

$ad = hq$; слѣдственно $bc = hq$. Помянутая пропорція именуется *смѣшанная*.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, когда и средніе члены будутъ равны, то первые будутъ въ обратномъ содержаніи послѣднихъ.

§ 157. *Теорема.* Ежели члены пропорціи возвысятся въ какую нибудь степень, то и возвышенія ихъ будутъ Геометрически пропорціональны.

Доказательство. Положимъ, что члены предложенной здѣсь пропорціи возвышены будутъ до степени m, то каждая изъ нихъ составлять будетъ Геометрическую пропорцію; ибо изъ пропорціи $a : b = c : d$ видно, что $ad = bc$; по сей причинѣ и $a^2 d^2 = b^2 c^2$, также $a^m d^m = b^m c^m$; поелику когда корни равны, то и степени ихъ равны.

$$a : b = c : d$$
$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$$
$$a^3 : b^3 = c^3 : d^3$$
$$a^m : b^m = c^m : d^m$$

Слѣдств. Изъ сего видно, ежели положимъ $m = \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$, то будетъ $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} : d^{\frac{1}{2}}$, то есть, $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$, также и $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$ и прочая.

§ 158. *Теорема.* Ежели изъ пропорціи $a : b = c : d$ составится пропорція $a + b : a + b = c + d : c + d$, а потомъ однѣ величины предъидущихъ членовъ умножатся чрезъ какое нибудь количество, *на примѣръ*: n, а другія чрезъ m, также однѣ величины послѣдующихъ членовъ чрезъ p, а другія чрезъ q, то произведенія

ихъ

ихъ будутъ Геометрически пропорцiональны, то есть $an+bm : ap+bq = cn+dm : cp+dq$.

Доказательство. Истинна сего предложенiя видна изъ того, что произведенiе крайнихъ $acnp+bcmp+adqn+dbqm$ равно произведенiю среднихъ $acnp+admp+bcqn+bdqm$; ибо $acnp = acnp$ и $bdqm = bdqm$, также $bcmp = admp$, и $adqn = bcqn$, потому что $ad = bc$.

§ 159. *Задача.* Между двухъ величинъ a и b, найти среднее Геометрическое пропорцiональное число.

Рѣшен. Въ разсужденiи вопроса будетъ $a : x = x : b$, при чемъ $x \times x = x^2 = ab$ (§ 146), а по извлеченiи изъ обѣихъ частей квадратнаго корня найдется $x = \sqrt{ab}$. Ежели $a = 2$, $b = 8$, то будетъ $x = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$.

§ 160. *Задача.* Къ тремъ даннымъ членамъ a, b и c найти четвертое пропорцiональное число x.

Рѣшен. Поелику въ пропорцiи Геометрической $a : b = c : x$ произведенiе $ax = bc$, а по раздѣленiи каждой части на a, найдется $x = \frac{bc}{a}$, то есть четвертой пропорцiональной членъ равенъ частному числу, отъ раздѣленiя произведенiя среднихъ членовъ на первой членъ.

Прибавлен. 1. Ежели будетъ $b = c$, то есть ежели пропорцiя будетъ непрерывная, то будетъ $x = \frac{b^2}{a}$, по сей причинѣ для сысканiя третьяго Геометрическаго члена непрерывной пропор-

порціи должно раздѣлить квадратъ средняго члена на первой членъ.

Прибавлен. II. Ежели потребно будетъ найти какой нибудь изъ среднихъ членовъ Геометрической пропорціи, *на примѣръ*: третій, то будетъ $a : b = x : d$, при чемъ $ad = bx$, а по раздѣленіи на b, найдется $x = \frac{ad}{b}$, то есть третій пропорціональный членъ сыщется, когда произведеніе крайнихъ на второй членъ раздѣлится.

О прогрессіи Геометрической.

§ 161 *Опредѣлен.* Ежели непрерывная Геометрическая пропорція будетъ имѣть болѣе трехъ членовъ, такъ что предъидущій членъ послѣдующаго содержанія равенъ послѣдующему предъидущаго содержанія, какъ *на примѣръ*, $a : b = b : c = c : d = d : e = e : h$, тогда такой рядъ пропорціональныхъ чиселъ именуется *прогрессія Геометрическая*, и для краткости пишется такъ $\div\!\div a : b : c : d : e : h$. Изъ сего видно, что прогрессія Геометрическая есть рядъ чиселъ, изъ коихъ у двухъ сряду стоящихъ членовъ частныя равны, какъ *на примѣръ*: $\div\!\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ и проч. гдѣ знаменатель $= 2$.

Слѣдст. I. Изъ сего удобно можно видѣть, когда положимъ, что знаменатель содержанія $\frac{a}{b} = \frac{1}{p}$, или $\frac{b}{a} = p$, то въ обоихъ случаяхъ будетъ второй членъ $b = ap$, а третій членъ сы-

сыщется, когда второй членъ въ первомъ случаѣ раздѣлится, а во второмъ умножится на знаменателя содержанія, то есть $ap : \frac{1}{p} = ap^2$ или $ap \times p = ap^2$ и такъ далѣе.

Слѣдст. II. Изъ сего видно, что всякая Геометрическая прогрессія можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ: $\div\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6$ и проч., поелику предъ симъ уже сказано, что прогрессія есть рядъ количествъ, у которой сряду двухъ стоящихъ членовъ содержанія равны, посему всякой послѣдующій членъ, какъ-то изъ предъидущаго слѣдствія видно, равенъ предъидущему, раздѣленному или умноженному на знаменателя содержанія; слѣдовательно, когда первой членъ $= a$, то второй будетъ ap, третій ap^2, четвертой ap^3 и проч.

Слѣдст. III. Изъ сего удобно можно видѣть, что всякой членъ Геометрической прогрессіи, *на примѣръ*, пятой сыщется, когда первой членъ a знаменателемъ содержанія p, возвышеннымъ въ степень числа предъидущихъ членовъ, умножится; по сей причинѣ послѣдній членъ x какой нибудь прогрессіи неопредѣленнаго числа членовъ сыщется, когда первой членъ a умножится чрезъ знаменателя p^{n-1}, то есть будетъ $x = ap^{n-1}$.

§ 162. *Теорема.* Въ прогрессіи Геометрической произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію двухъ другихъ какихъ нибудь членовъ, въ равномъ разстояніи отъ первыхъ находящихся.

Доказат. Справедливость сего удобно можно видѣть изъ предписанной во II. Слѣдствіи § 161 прогрессіи, у которой произведеніе третья-

го

го члена съ пятымъ то есть $ap^2 \times ap^4$, равно произведенію перваго съ седьмымъ, то есть $a \times ap^6 = a^2p^6$.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что квадратъ какого нибудь члена Геометрической прогрессіи равенъ произведенію двухъ другихъ членовъ, отъ него въ равномъ разстояніи находящихся, какъ-то изъ той же прогрессіи усмотрѣть можно; ибо произведеніе третьяго члена на седьмой есть $ap^2 \times ap^6 = a^2p^8$ равно квадрату пятаго члена, то есть $ap^4 \times ap^4 = a^2p^8$.

§ 163. *Теорема.* Въ прогрессіи Геометрической сумма всѣхъ членовъ безъ послѣдняго къ суммѣ всѣхъ членовъ безъ перваго содержится, какъ первой ко второму.

Доказател. Представимъ себѣ слѣдующую прогрессію $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$ и проч. то по силѣ предложенія будетъ $a + ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 : ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + ap^5 = a : ap$; ибо произведеніе крайнихъ $a^2p + a^2p^2 + a^2p^3 + a^2p^4 + a^2p^5 = a^2p + a^2p^2 + a^2p^3 + a^2p^4 + a^2p^5$ произведенію среднихъ.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, ежели положимъ, что послѣдній членъ $= x$, сумма всѣхъ членовъ прогрессіи $= S$, то будетъ $S - x : S - a = a : ap$, при чемъ произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, то есть $apS - apx = aS - a^2$, откуда найдется $pS - S = xp - a$, а по раздѣленіи обѣихъ количествъ на $p - 1$, найдется $S = \frac{xp - a}{p - 1}$, то есть сумма всѣхъ членовъ прогрессіи Геометрической, равна разности между про-

произведенiемъ большаго члена на знаменателя и меньшимъ членомъ, раздѣленной на знаменателя безъ единицы.

§ 164. *Теорема.* Въ прогрессiи Геометрической ÷÷ $a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$ и проч. первое сумма, второе разность, третье произведенiе членовъ, безпрерывно одного за другимъ слѣдующихъ, будутъ въ прогрессiи Геометрической.

Доказательство. Слѣдуетъ доказать, что изъ прогрессiи $a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$ и проч. произойдутъ слѣдующiя прогрессiи:

÷÷ $a + ap : ap + ap^2 : ap^2 + ap^3 : ap^3 + ap^4$ и проч.

÷÷ $a - ap : ap - ap^2 : ap^2 - ap^3 : ap^3 - ap^4$ и проч.

÷÷ $a^2p : a^2p^3 : a^2p^5 : a^2p^7 : a^2p^9$ и проч.

Справедливость сего видна изъ того, что каждыхъ двухъ сряду стоящихъ членовъ частныя (знаменатели) одинаки.

§ 165. *Теорема.* Ежели члены Геометрической прогрессiи возвышены будутъ въ какую нибудь степень, то и степени ихъ также составятъ Геометрическую прогрессiю.

Доказательство. Пусть будетъ прогрессiя ÷÷ $a : ax : ax^2 : ax^3 : ax^4 : ax^5$ и проч. то будетъ также прогрессiя и $a^n : a^n x^n : a^n x^{2n} : a^n x^{3n} : a^n x^{4n}$ и проч. справедливость сего видна изъ того, что каждый послѣдующiй членъ равенъ предъидущему, умноженному чрезъ знаменателя x^n.

Слѣдств. Ежели положимъ $n = \frac{1}{2}$, то будетъ $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{2}}x^2 : a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$ и прочая или $\sqrt{a} : \sqrt{ax} : \sqrt{ax^2} : \sqrt{ax^3} : \sqrt{ax^4}$ и проч. то

есть квадратные корни изъ членовъ прогрессіи также составляютъ Геометрическую прогрессію. По сей причинѣ корни третій, четвертой и вообще степени n равномѣрно составляютъ прогрессію Геометрическую, какъ-то $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ax} : \sqrt[n]{ax^2} : \sqrt[n]{ax^3} : \sqrt[n]{ax^4}$ и проч.

Слѣдств. II. Ежели въ прогрессіи Геометрической положимъ $a = 1$, знаменатель $= b$, то прогрессія $\div a : ab : ab^2 : ab^3 : ab^4 : ab^5$ и проч. изобразится слѣдующимъ образомъ $\div a^0 : b^1 : b^2 : b^3 : b^4 : b^5$ и проч. Изъ сего видно, что показатели по порядку идущихъ степеней прогрессіи Геометрической суть въ прогрессіи Ариѳметической.

Слѣдств. III. Изъ сего удобно можно видѣть, когда показатели какой нибудь величины въ прогрессіи Ариѳметической, то степени оной будутъ въ прогрессіи Геометрической, какъ *на примѣръ*: $\div a^n : a^{2n} : a^{3n} : a^{4n} : a^{5n}$ и проч. также и $\div a^n : a^{n+r} : a^{n+2r} : a^{n+3r}$: и проч. поелику частныя между двухъ сряду стоящихъ членовъ суть одинаки.

§ 166. *Теорема.* Въ прогрессіи Геометрической квадратъ перваго члена содержится къ квадрату втораго, какъ первой къ третьему; также и кубъ перваго къ кубу втораго члена, какъ первой къ четвертому.

Доказат. Положимъ, какъ и прежде прогрессію $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$ и прочая; то будетъ $a^2 : a^2p^2 = a : ap^2$; ибо произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ. Также и

a^3 :

$a^3 : a^3p^3 = a : ap^3$; поелику и въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ. И вообще ежели число членовъ будетъ n, то первой членъ степени $n-1$ ко второму той же степени, какъ первой къ последнему, то есть $a^{n-1} : a^{n-1}p^{n-1} = a : ap^{n-1}$ *); ибо произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то есть $a^{n-1} \times ap^{n-1} = a \times a^{n-1} \times p^{n-1} = a^n p^{n-1}$; или положимъ первой членъ $= a$ второй $= b$, то знаменатель содержанія будетъ $\frac{b}{a}$, а последній членъ $a \times \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$ (§ 161 -сл. 111); и такъ будетъ $a^{n-1} : b^{n-1} = a : \frac{ab^{n-1}}{a^{n-1}}$, ибо произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то есть $a^{n-1} \times \frac{ab^{n-1}}{a^{n-1}} = a \times b^{n-1}$ (§ 41. след.).

§ 167. *Задача.* Извѣстенъ первый членъ и знаменатель прогрессіи найти десятой членъ.

Рѣшен. Положимъ первой членъ $3 = a$, знаменатель $2 = b$, число членовъ $10 = n$, то десятой членъ x будетъ $= ab^{n-1} = 1536$ (§ 161).

§ 168. *Задача.* Данъ первой членъ a, последней b, число членовъ n, найти знаменателя x.

Рѣшен. Поелику последній членъ $b = ax^{n-1}$ (§ 161), то разделя обе части сего уравненія на a, будетъ $x^{n-1} = \frac{b}{a}$, откуду найдется $x = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$, то есть знаменатель прогрессіи сыщется, когда изъ частнаго числа, отъ разделенія последняго

 члена

*) ap^{n-1} есть последній членъ прогрессіи (§ 160 следств. III).

члена на первой извлечется корень степени числа членовъ безъ единицы.

Прибавлен. Ежели дано будетъ число членовъ n, знаменатель p и послѣдній членъ b, то первый членъ x сыщется слѣдующимъ образомъ: $xp^{n-1} = b$, гдѣ $x = \frac{b}{p^{n-1}} = \frac{bp}{p^n}$.

§ 169. *Задача.* Извѣстенъ первой членъ a, знаменатель p и число членовъ n, найти сумму прогрессіи.

Рѣшен. Положимъ, что сумма прогрессіи S, второй членъ будетъ $= ap$ (§ 161. Слѣд 1), послѣдній членъ x найдется по предъидущей Задачѣ; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: $S - x : S - a = a : ap$ (§ 163), при чемъ будетъ $apS - apx = aS - a^2$, раздѣли на a, выйдетъ $pS - px = S - a$, въ коемъ по переставкѣ членовъ будетъ $pS - S = px - a$, а по раздѣленіи каждой части на $p - 1$, найдется $S = \frac{px - a}{p - 1}$, то есть сумма прогрессіи равна произведенію изъ самаго большаго члена и знаменателя прогрессіи, безъ самаго меньшаго, раздѣленному на знаменателя безъ единицы.

Слѣдст. I. Изъ сего явствуетъ, I) ежели положимъ $p = 2$, $n = 5$, то будетъ самой большой членъ $x = a \times 2^{n-1} = a \times (2)^4 = 16a$, а сумма прогрессіи $S = \frac{16a \times 2 - a}{2 - 1} = 31a$, гдѣ разность между первымъ и послѣднимъ членомъ равна разности между суммою прогрессіи и послѣднимъ членомъ, то есть $16a - a = 15a = 31a - 16a$. II) Пусть $p = 3$, $n = 5$, то будетъ

самой

самой большой членъ $x = a \times (3)^4 = 81a$, а сумма прогрессіи $S = \frac{81a \times 3 - a}{3 - 1} = \frac{242a}{2} = 121a$, гдѣ разность между первымъ и послѣднимъ членомъ равна двойной разности между суммою прогрессіи и самымъ большимъ членомъ, то есть $81a - a = 80a = (121a - 81a) \times 2$. III) Естьли положимъ $p = 4$, $n = 5$, то будетъ самой большой членъ $x = a \times (4)^4 = 256a$, а сумма прогрессіи $S = \frac{256a \times 4 - a}{4 - 1} = \frac{1023a}{3} = 341a$, гдѣ разность между самымъ большимъ и меньшимъ членомъ будетъ равна утроенной разности между суммою прогрессіи и большимъ членомъ, то есть $256a - a = 255a = (341a - 256a) \times 3$, и такъ далѣе.

Слѣдст. II. Изъ сего удобно можно видѣть, когда въ прогрессіи Геометрической будетъ знаменатель содержанія $p = 2$, тогда $x - a = S - x$, откуда найдется $S = 2x - a$; слѣдовательно для сысканія суммы прогрессіи должно изъ удвоеннаго большаго члена вычесть меньшой членъ. А естьли знаменатель $p = 3$, то будетъ $x - a = (S - x) \times 2 = 2S - 2x$, откуда найдется $S = \frac{3x - a}{2}$, то есть изъ утроеннаго большаго члена вычти самой меньшой членъ, разность ихъ раздѣли на знаменателя безъ единицы, получишь сумму прогрессіи. И наконецъ когда $p = 4$, то будетъ $x - a = (S - x) \cdot 3 = 3S - 3x$, гдѣ найдется $S = \frac{4x - a}{3}$, то есть самой большой членъ, четырежды взятой безъ меньшаго, раздѣленной на знаменателя безъ единицы, равенъ

равенЪ суммѣ прогрессiи. По сей причинѣ сумма убывающей прогрессiи будетЪ:

двойнаго содерж. $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}$ - - $\frac{1}{\infty}$ или $0 = 1$
тройнаго - - $\frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \frac{1}{243} : \frac{1}{729}$ - - $\frac{1}{\infty}$ или $0 = \frac{1}{2}$
четвернаго - - $\frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \frac{1}{256} : \frac{1}{1024} : \frac{1}{4096}$ - $\frac{1}{\infty}$ - - $0 = \frac{1}{3}$
десятернаго - $\frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} : \frac{1}{100000}$ - $\frac{1}{\infty}$ - - $0 = \frac{1}{9}$.

Поелику вЪ каждой изЪ сихЪ прогрессiй самый большiй членЪ x есть первой, а послѣднiй и самой меньшiй членЪ a есть 0, знаменатель же содержанiя p вЪ первой прогрессiи $= 2$, во второй $= 3$, вЪ третiй $= 4$, вЪ четвертой $= 10$; по сей причинѣ сумма первой прогрессiи $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 0}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$; сумма второй прогрессiи $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{3 \times \frac{1}{3} - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}$; сумма третьей $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{4 \times \frac{1}{4} - 0}{4 - 1} = \frac{1}{3}$; и наконецЪ сумма четвертой $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{10 \times \frac{1}{10} - 0}{10 - 1} = \frac{1}{9}$. ИзЪ сего видно, что для сысканiя всѣхЪ частей единицы, составляющихЪ безконечно убывающую Геометрическую прогрессiю, должно раздѣлить единицу на знаменателя прогрессiи, единицею уменьшеннаго.

§ 170. *Задача.* Между двухЪ данныхЪ членовЪ a и b найти два среднихЪ пропорцiональныхЪ x и y Геометрической прогрессiи.

Рѣшен. Данные члены составятЪ слѣдующую Геометрическую прогрессiю: $\div a : x : y : b$, у которой будетЪ $a^3 : x^3 = a : b$ (§ 166); при чемЪ $ax^3 = a^3b$ раздѣли каждую часть на a,

вый-

выйдетъ $x^3=a^2b$, а по извлеченіи кубическаго корня, найдется $x=\sqrt[3]{a^2b}$, то есть первой средній пропорціональной членъ равенъ кубическому корню изъ произведенія квадрата перваго члена на послѣдній b; а чтобъ найти второй средній, то раздѣля квадратъ перваго средняго, то есть $x^2=\sqrt[3]{a^4b^2}$ на первой пропорціональной членъ a, получишь второй средній; ибо $a:x:y$, по сей причинѣ $y=\frac{x^2}{a}$. Пусть будетъ $a=3$, $b=81$, тогда будетъ $x=\sqrt[3]{9\times81}=\sqrt[3]{729}=9$; а $y=\frac{9\times9}{3}=27$; но ежели количество a^2b будетъ несовершенной кубъ, то должно находить помянутые средніе пропорціональные члены x и y посредствомъ десятичныхъ дробей.

§ 171. *Задача.* Между двухъ количествъ a и b найти n среднихъ пропорціональныхъ Геометрическихъ членовъ.

Рѣшен. Положимъ знаменатель прогрессіи x, число членовъ вмѣстѣ съ a и b будетъ $n+2$, и такъ послѣдній членъ $b=ax^{n+1}$ (§ 161); раздѣли обѣ части на a, будетъ $x^{n+1}=\frac{b}{a}$, извлеки изъ обѣихъ частей корень степени $n+1$, найдется $x=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$; потомъ умножь первой членъ a найденнымъ знаменателемъ, выйдетъ второй членъ $a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$; а когда сей членъ умножится тѣмъ же знаменателемъ, то выйдетъ

 тре-

третій членъ $a\sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}}$ и такъ далѣе; отъ чего произойдетъ слѣдующая прогрессія: $a : a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a\sqrt[n+1]{\frac{b^3}{a^3}} : a\sqrt[n+1]{\frac{b^4}{a^4}}$ и проч. : b. Положимъ $n=5$, то будетъ прогрессія $a : a\sqrt[6]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}} : a\sqrt[6]{\frac{b^3}{a^3}} : a\sqrt[6]{\frac{b^4}{a^4}}$ $a\sqrt[6]{\frac{b^5}{a^5}} : b$. Ежели сіи члены возвышены будутъ въ степень числа членовъ безъ одного, то есть въ шестую степень, то выйдетъ прогрессія слѣдующая: $a^6 : a^5b : a^4b^2 : a^3b^3 : a^2b^4 : ab^5 : b^6$; поелику частные между двухъ сряду стоящихъ членовъ равны между собою.

О различныхъ примѣрахъ пропорціи и прогрессіи Геометрической.

§ 172. *Опредѣн.* Рѣшеніе вопросовъ, зависящее отъ Геометрической пропорціи, называется *тройное правило*, которое въ разсужденіи великаго и полезнаго въ обществѣ употребленія именуется золотымъ; и такъ тройное правило есть средство по тремъ извѣстнымъ членамъ сыскивать четвертое пропорціональное число.

Примѣчан. Тройное правило раздѣляется на тройное правило *прямое*, *обратное*, *сложное* и *складное* или *товарищное*.

§ 173. Тройное прямое правило основано на прямой Геометрической пропорціи, *на примѣръ*: когда 30 человѣкъ солдатъ сдѣлаютъ 24 сажени траншей, тогда 50 человѣкъ солдатъ сколько саженъ сдѣлаютъ тѣхъ траншей въ то же время?

мя? Изъ сего вопроса видно, чѣмъ больше людей, тѣмъ больше успѣха въ работѣ въ одно время, то есть число людей въ одинакомъ содержаніи ихъ успѣховъ: и такъ будетъ 30 человѣкъ содержатся къ 50 человѣкамъ, какъ 24 сажени, сдѣланныя первыми, къ числу саженъ, кои сдѣлаютъ послѣдніе въ одно время, то есть $30^{че} : 50^{че} = 24^{саж} : x^{саж}$; при чемъ $30x = 50 \times 24 = 1200$ (§ 146), а по раздѣленіи на 30 найдется $x = \frac{1200}{30} = 40$; или все равно, что для сысканія четвертаго соразмѣрнаго числа, должно второй членъ 50 умножить третьимъ 24, и произведеніе раздѣлить на первой 30, частное $40 = x$ будетъ искомое число саженъ, которое 50 человѣкъ солдатъ сдѣлаютъ въ то же время, въ которое 30 человѣкъ сдѣлаютъ 24 сажени.

§ 171. Тройное обратное правило основаніе свое имѣетъ на обращенной Геометрической пропорціи, *на примѣръ*: когда 4 человѣка сдѣлаютъ нѣкое дѣло въ три дни, то 5 человѣкъ во сколько дней ту же работу сдѣлать могутъ. Изъ сего видно, что данные члены прямой пропорціи $4^{чел} : 5^{чел} = 3^{дн} : x^{дн}$, составить не могутъ; поелику въ сей пропорціи 5 больше 4хъ, по сему и требуемой x будетъ больше трехъ: но какъ 5 человѣкъ ту же работу сдѣлать могутъ въ меньшее время, нежели 4 человѣка въ 3 дни; по сей причинѣ будетъ время 4 человѣкъ содержаться ко времяни 5 человѣкъ, какъ x къ 3мъ; ибо чѣмъ больше людей, тѣмъ меньше должно употребить время на содѣланіе того же дѣла, и для того будетъ $4^{че} : 5^{че}$

$=x^{дн}:3^{дн}$, при чемъ $5x=12$, а по раздѣленіи на 5 найдется $x=2\frac{2}{5}$ дня. = 2 дни 9 час. 37 минутъ; или по обыкновенному обратному правилу $4^{че}:3^{дн}:=5^{че}:x^{дн}$, при чемъ $\frac{4.3}{5}=x$, то есть для сысканія требуемаго числа, должно первой членъ умножить вторымъ и произведеніе ихъ раздѣлить на третій.

§ 175. *Опредѣлен.* Ежели при трехъ данныхъ членахъ заключается нѣсколько обстоятельствъ, тогда такое правило тройное именуется *сложное*, и раздѣляется на правило пятерное, семерное и далѣе. Пятерное правило есть способъ чрезъ 5 данныхъ чиселъ находить шестое пропорціональное число. Семерное есть средство, чрезъ семь данныхъ количествъ сыскивать восьмое пропорціональное число и такъ далѣе.

Сложное правило зависитъ отъ сложныхъ содержаній.

Примѣръ пятернаго правила:

Когда за 12 верстъ на три лошади заплачено, 1 рубль 20 коп. то сколько надлежитъ заплатить за 200 верстъ на 8 лошадей.

Въ семъ примѣрѣ главные члены суть версты, а прочее ихъ обстоятельства, и число денегъ будетъ въ сложномъ содержаніи числа верстъ и числа лошадей; по сей причинѣ будетъ

$12^{вер}:200^{вер}$

$3^{ло}\ :8^{ло}$

$36\ :1600=120^{ко}:x^{ко}$, найдется $x=\frac{1600\times120}{36}$ $=53$ рубл. $33\frac{1}{3}$ копѣки.

До-

Доказателство. Поелику на 3 лошади за 12 верстъ то же должно заплатить, что и одной лошади за 36 верстъ; также и на 8 лошадей такоежъ количество заплатить должно за 200 верстъ, что и одной за 1600 верстъ; по сей причинѣ въ разсужденіи одной лошади будетъ чѣмъ больше верстъ, тѣмъ больше и денегъ заплатить должно, то есть какъ $36^{вер} : 1600^{вер} = 120^{коп} : x$. ч. д. н.

Или по обыкновенному правилу сдѣлай слѣдующее:

$12^{вер} : 200^{вер} = 120 : x = \frac{200 \times 120}{12} = 20$ руб. такое число денегъ заплатить должно 3мъ лошадямъ за 200 верстъ; потомъ $3^{ло} : 8^{ло} = 20^{руб} : y = \frac{20 \times 8}{3} = 53$ рубл. $33\frac{1}{3}$ коп.

Справедливость перваго рѣшенія докажется и посредствомъ сихъ двухъ пропорцій, естьли только во второй поставится x вмѣсто 20, а потомъ члены одной пропорціи умножатся членами другой, какъ слѣдуетъ:

$$12^{вер} : 200^{вер} = 120^{коп} : x^{коп}$$
$$3^{ло} : 8^{ло} = x : y$$

будетъ $36 : 1600 = 120x : yx$, а по раздѣленіи членовъ втораго содержанія на x будетъ $36 : 1600 = 120 : y$ (§ 149).

Примѣръ семернаго правила.

Три человѣка, работая въ день по 7 часовъ, въ два дни выкопали 84 сажени канала; спрашивается сколько саженъ выкопаютъ 5 человѣкъ въ 3 дни, работая въ день по 4 часа.

Разположа члены, какъ слѣдуетъ: $3^{чел} : 5^{чел}$ умножь 3 чрезъ 2 и чрезъ 7, про- $2^{дн} : 3^{дн}$ изведеніе будетъ 42; потомъ у- $7^{час} : 4^{час}$ множь 5 чрезъ 3 и чрезъ 4, произведеніе будетъ 60 и наконецъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: $42 : 60 = 84 : x = \frac{60 \times 84}{42} = 120$ требуемое число саженъ.

Доказательство. Изъ дѣйствія содержаній видно, что ту работу которую робатали 3 человѣка два дни по семи часовъ въ день, одинъ человѣкъ сдѣлаетъ въ 42 часа; также сколько сдѣлаютъ пять человѣкъ въ 3 дни работая въ день по 4 часа, столькожъ сдѣлаетъ одинъ человѣкъ въ 60 часовъ; слѣдовательно производство работъ сихъ людей въ сложномъ содержаніи числа людей, числа дней и часовъ.

Или по обыкновенному Ариѳметическому правилу сдѣлай слѣдующее:

$3^{чел} : 5^{чел} = 84^{саж} : x^{саж} = 140$. стол. сраб. 5 чел. въ 2 дни работ. 7 час.

$2^{дн} : 3^{дн} = 140^{саж} : y^{саж} = 210$. стол. сраб. 5 чел. въ 3 дни раб. по 7 час.

$7^{час} : 4^{час} = 210^{саж} : z^{саж} = 120$ искомое число саж.

Истинна перваго рѣшенія докажется и посредствомъ сихъ трехъ пропорцій, естьли только во второй поставится x вмѣсто 140, а въ третій y вмѣсто 210, а потомъ члены сихъ пропорцій умножатся между собою, какъ изъ слѣдующаго видно

$3^{чел} : 5^{чел} = 84^{са} : x^{са}$
$2^{дн} : 3^{дн} = x^{са} : y^{са}$
$7^{час} : 4^{час} = y : z$

42 : 60 = 84xy : xyz (§ 153), а по раздѣленіи членовъ втораго содержанія на xy будетъ 42 : 60 = 84 : z = 120.

Второй примѣръ: Четыре писаря 40 страницъ, изъ коихъ каждая по 20 строкъ, перепишутъ въ 2 дня; спрашивается въ какое время 6 писарей напишутъ 60 страницъ, изъ коихъ каждая по 30 строкъ.

Здѣсь дни въ сложномъ содержаніи изъ прямыхъ содержаній числа страницъ и числа строкъ, и обратнаго содержанія числа писарей; и такъ составя сложное содержаніе, сдѣлай пропорцію, какъ и прежде.

$40^{стр} : 60^{стр}$ или 2 : 3
$20^{стро} : 30^{стро}$ или 2 : 3
$6^{пи} : 4^{пи}$ или 3 : 2

12 : 18 или 2 : 3 = $2^{дн} : x^{дн}$ = 3 днямъ, искомое время.

Или по обыкновенному правилу будетъ
$6^{пи} . 4^{пи} = 2^{дн} : x$ въ такое время напиш. 6. пис. 40 стран. по 20 строкъ
40 : 60 = x : y. въ такое врем. 6 пис. напиш. 60 стран. въ 20 строк.
20 : 30 = y : z. въ так. врем. 6 пис. напиш. 60 стран. по 30 строк.

4800 . 7200 или по раздѣленіи на 2400 будетъ 2 . 3 = 2xy : xyz а по раздѣленіи, вторыхъ членовъ на xy будетъ 2 : 3 = 2 : z = 3 дни.

При-

Примѣръ девятернаго правила.

Когда 20 человѣкъ въ 12 дней, работая въ день по 4 часа, выроютъ 40 саженъ канала, шириною 8 саж. тогда 30 чел. въ 6 дней, работая въ день по 8 часовъ, сколько саженъ выроютъ такого канала, котораго ширина 10 саженъ.

Рѣшен. Составя сложныя содержанія, какъ въ предъидущихъ задачахъ показано, наконецъ сдѣлай пропорцію, какъ слѣдуетъ:

$20^{чел} : 30^{чел}$ или $2 : 3$
$12^{дн} : 6^{дн}$ или $2 : 1$
$4^{ча} : 8^{ча}$ или $1 : 2$
$10^{саж} : 8^{саж}$ $5 : 4$ въ обратн. содержан.

$20 : 24$ или $5 : 6 = 40 : x = 48$ искомое число саж.

Тожъ самое произойдетъ и по обыкновенному тройному правилу,

$$20^{чел} : 30^{чел} = 40^{саж} : x$$
$$12^{дн} : 6^{дн} = x : y$$
$$4^{ча} : 8^{ча} = y : z$$
$$10 : 8 = z : u$$ въ обратномъ содерж.

$9600 : 11520 = 40xyz : xyzu$, а по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на 1920, а втораго на xyz, будетъ, $5 : 6 = 40 : u = 48$.

§ 176 *Тройное складное или товарищное* правило основано на складной пропорціи (§ 154), *на примѣръ* три купца сложились торговать; первой положилъ 200 рубл. другой 400, третій 600 рублей, коими приторговали 240 рублей; спрашивается, сколько которому изъ приторгу достанется.

въ

вЪ семЪ вопросѣ сумма 1200 рублей положенныхЪ вЪ торгЪ содержится кЪ суммѣ припоргованныхЪ денегЪ 240 рубл., какЪ положенное вЪ торгЪ количество денегЪ каждаго кЪ его припоргу особенно; отЪ чего произойдутЪ три слѣдующія пропорціи:

1200 : 240 = 200 : x = 40 столько первому.
1200 : 240 = 400 : x = 80 столько второму.
1200 : 240 = 600 : x = 120 столько третьему.

Другой примѣрЪ. Три купца, ПетрЪ, ЯковЪ и ПавелЪ торговали вообще: перваго 352 рубли вЪ торгу были 12 мѣсяцовЪ, втораго 1072 рубли 3 мѣсяца, третьяго 156 рублей 9 мѣсяцовЪ, которыми они вообще приторговали 9581 рубль, спраш., сколько которому изЪ припоргу достанется.

Рѣшен. Умножь капитальныя деньги каждаго чрезЪ число мѣсяцовЪ, которые они вЪ торгу были; поелику естьли бы каждой изЪ нихЪ увеличилЪ число своихЪ капитальныхЪ денегЪ во столько разЪ, сколько онѣ мѣсяцовЪ вЪ торгу были: то бы такимЪ числомЪ денегЪ всякой могЪ приторговать столькожЪ денегЪ вЪ одинЪ мѣсяцЪ, сколько положенными деньгами вЪ соотвѣтственное имЪ число мѣсяцовЪ; по сей причинѣ сумма ихЪ произведеній (вЪ разсужденіи одного мѣсяца) будетЪ содержаться кЪ суммѣ приторгованныхЪ денегЪ, какЪ произведеніе капитальныхЪ денегЪ каждаго на число мѣсяцовЪ кЪ приторгу всякаго особенно, и для того произойдутЪ три слѣдующія пропорціи:

$352 \times 12 = 4224$
$1072 \times 3 = 3216$
$156 \times 9 = 1404$

$8844 : 9581 = 4224 : x = 4576$ первому.
$8844 : 9581 = 3216 : x = 3484$ втором.
$3844 : 9581 = 1404 : x = 1521$ трет.

Задача I. Одинъ корабль, выступя изъ гавани, плыветъ всякой часъ по 8 верстъ; потомъ послѣ 12 часовъ за нимъ въ слѣдъ другой пошолъ, и плыветъ всякой часъ по 10 верстъ; спрашивается, во сколько часовъ и на какомъ разстояніи второй перваго догонитъ.

Рѣшен. Положимъ, второй корабль перваго догонитъ во время x, то время путешествія перваго будетъ $x + 12$. И такъ будетъ I) $1^{\text{час}} : 12 + x^{\text{час}} = 8^{\text{вер}} : \frac{(12+x)\times 8}{1} = 96 + 8x$. II) $1^{\text{час}} : x^{\text{час}} = 10^{\text{вер}} : 10x^{\text{вер}}$; но какъ перейденныя пространства обоими кораблями между собою будутъ равны, того ради $10x = 96 + 8x$, откуда найдется $x = \frac{96}{2} = 48$ час $= 2$ сутки. Потомъ $48 \times 10 = 480$ требуемое разстояніе.

Задача. II. Нѣкто нанялъ работника на годъ съ такимъ условіемъ, чтобы за каждой работной день платить ему по 20 копѣекъ, а за прогульной день вычитать у него изъ заработныхъ денегъ по 10 коп.; по прошествіи же года нашлось, что хозяинъ работнику долженъ не былъ: спрашивается число работныхъ и неработныхъ дней.

Рѣшен. Положимъ 365 дней $= a$, число работныхъ дней $= x$, неработныхъ дней будетъ

$a - x$; отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: I), $1^{де} : x^{дн} = 20^{коп} : 20x$, II) $1^{де} : a - x^{дне} = 10^{коп} : 10a - 10x$; но какъ число заработныхъ денегъ равно числу прогульныхъ денегъ; по сей причинѣ будетъ $20x = 10a - 10x$ или $30x = 10a$, а по раздѣленіи на 30, найдется $x = \frac{10a}{30} = \frac{10 \times 365}{30} = 121\frac{2}{3} =$ числу работныхъ дней; числожъ неработныхъ дней будетъ $365 - 121\frac{2}{3} = 243\frac{1}{3}$ дня.

Задача. III. Нѣкто нанялъ слугу на годъ и обѣщалъ ему заплатить 18 рубл. и пару платья, но слуга по прошествіи 5 мѣсяцовъ получилъ только 4 рубля да пару платья; спрашивается цѣна платья.

Рѣшен. Положимъ цѣна платья x рубл. И такъ будетъ слѣующая пропорція: $12 : 5 = x + 18 : x + 4$, при чемъ $12x + 48 = 5x + 90$ или $12x - 5x = 90 - 48$, то есть $7x = 42$, а по раздѣленіи на 7, найдется $x = 6$ рубл. $=$ цѣнѣ платья.

Задача IV. Прудъ двумя трубами наполняется въ 12 минутъ, а одною изъ нихъ въ 20 минутъ; спрашивается въ какое время наполнится другою.

Рѣшен. Положимъ искомое время, въ которое прудъ наполнится другою трубою $= x$ минутъ; отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: $x' : 12' = 1 : \frac{12}{x}$ такая часть пруда наполн. друг. труб. въ $12'$. Потомъ $20' : 12' = 1 : \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ такая часть пруда наполнится первою трубою въ $12'$; но какъ сіи найденныя части, вмѣстѣ

взя-

взятыя, составляютъ величину цѣлаго пруда; по сей причинѣ будетъ $\frac{12}{x}+\frac{3}{5}=1$ или $\frac{12}{x}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$, откуда найдется $2x=60$, а по раздѣленіи обѣихъ частей на 2, найдется $x=\frac{60}{2}=30'$ искомое время.

Задача V. Требуется найти два числа x и y такого свойства, чтобы меньшое y содержалось къ большему x, какъ $2:7$, и притомъ частное отъ раздѣленія большаго на меньшое было бы $=10$.

Рѣшен. По первому условію будетъ $y:x=2:7$, при чемъ $2x=7y$ (§ 146), гдѣ $x=\frac{7y}{2}$; а по второму будетъ $\frac{x}{y}=10$ или $x=10y$; потомъ соединя сіи равныя количества, произойдетъ $10y=\frac{7y}{2}$ или $20y=7y$, а по раздѣленіи обѣихъ частей на y, будетъ $20=7$, чему быть не возможно; слѣдовательно и задача на такихъ условіяхъ есть не возможна.

Задача. VI. Неизвѣстному числу нищихъ дано 240 коп., изъ коихъ нѣкоторымъ дано по 6 коп. а другимъ по 16 коп. и притомъ число первыхъ содержится къ числу другихъ, какъ $2:3$; спрашивается число нищихъ.

Рѣшен. Положимъ $240=a$, число нищихъ первыхъ $=x$, вторыхъ y, то по силѣ вопроса будетъ I) $6x+16y=a$, II) $x:y=2:3$, при чемъ $3x=2y$ (§ 146). И такъ изъ перваго уравненія $6x+16y=a$ найдется $x=\frac{a-16y}{6}$, а

изъ

изъ втораго $3x=2y$ выйдетъ $x=\frac{2y}{3}$; потомъ изъ сихъ двухъ равныхъ количествъ составя уравненіе $\frac{2y}{3}=\frac{a-16y}{6}$, умножь каждую часть чрезъ 3 и 6, выйдетъ $12y=3a-48y$, откуда найдется $60y=3a$, или $20y=a$, а по раздѣленіи обѣихъ частей на 20, будетъ $y=\frac{a}{20}=\frac{240}{20}=12=$ числу нищихъ, коимъ дано по 16 коп.; также $x=\frac{2y}{3}$ $=\frac{24}{3}=8=$ числу нищихъ, коимъ дано по 6 коп.; число же всѣхъ нищихъ есть $12+8=20$.

Задача VII. Собака усмотрѣла зайца въ разстояніи 50 своихъ скачковъ, которая сдѣлаетъ три скачка въ то время, какъ заяцъ своихъ 4; а когда собака догнала зайца, то нашлось, что число собачьихъ скачковъ отъ мѣста зайца содержится къ числу заячьихъ скачковъ, какъ 2 : 3; спрашивается сколько собака сдѣлала своихъ скачковъ до того мѣста, гдѣ она догнала зайца.

Рѣшен. Положимъ число скачковъ собаки x, а зайца y, то въ разсужденіи вопроса будетъ $x:y=3:4$, при чемъ $4x=3y$, а по раздѣленіи на 4 найдется $x=\frac{3y}{4}$; но какъ собака отъ мѣста зайца сдѣлала $x-50$ скачковъ, то по силѣ вопроса будетъ $x-50:y=2:3$, при чемъ $3x-150=2y$ или $3x=2y+150$, а по раздѣленіи на 3 выйдетъ $x=\frac{2y+150}{3}$; потомъ составя изъ помянутыхъ равныхъ количествъ

уравненіе $\frac{3y}{4} = \frac{2y+150}{3}$, умножь каждую часть сего уравненія чрез 3 и чрез 4, будет $9y = 8y + 600$, или $9y - 8y = 600$, то есть $y = 600 =$ числу заячьих скачков, а $x = \frac{3y}{4} = \frac{600 \times 3}{4} = 450 =$ числу скачков собаки.

Задача VIII. Один из трех человѣк может сдѣлать нѣкое дѣло в 3 дни, другой ту же работу кончит в 4 дни, а третій в 5 дней; спрашивается в какое время, сдѣлать могут ту работу всѣ трое вмѣстѣ.

Рѣшен. Пусть будет время x, от сего произойдет слѣдующая пропорція: $3^{дн} : x^{дн} = 1 : \frac{x}{3}$, такую часть работы в искомое время сдѣлает первой человѣк; потом будет $4^{дн} : x^{дн} = 1 : \frac{x}{4}$, такую часть дѣла сработает второй в тож время; и наконец $5 : x = 1 : \frac{x}{5}$ такую часть дѣла сдѣлает третій во время x. И так сумма сих частей, вмѣстѣ взятых, будет равна цѣлой вещи, то есть $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 1$, или по изключеніи знаменателей $20x + 15x + 12x = 60$, то есть $47x = 60$, а по раздѣленіи на 47, найдется $x = \frac{60}{47} = 1\frac{13}{47} =$ искомому числу дней.

Задача IX. Число 10 раздѣлить на двѣ части так, чтобы куб первой части содержался к кубу второй части, как 8 : к 27.

Рѣшен. Положим первая часть $= x$, вторая будет $10 - x$; и так в разсужденіи вопроса

проса будетъ $x^3 : (10-x)^3 = 8 : 27$, а по извлеченіи изъ каждаго члена кубическаго корня, будетъ $x : 10-x = 2 : 3$ (§ 157), при чемъ $3x = 20-2x$, или $5x = 20$, а по раздѣленіи на 5 найдется $x = \frac{20}{5} = 4 =$ первой части; втораяжъ будетъ $= 6$, изъ коихъ $(4)^3 : (6)^3 = 8 : 27$, то есть $64 : 216 = 8 : 27$.

Задача X. Переплетчикъ продалъ двѣ бѣлыя книги: первую, въ которой было 48 листовъ, за 40 коп. другую, которая имѣла 75 листовъ, за 58 копѣекъ; переплетъ считаетъ въ одной цѣнѣ и бумага одинакой доброты; спрашивается чего переплетъ стоитъ.

Рѣшен. Положимъ переплетъ стоитъ x коп. то бумага первой книги стоитъ $40-x$, второй $58-x$; и такъ будетъ $40-x : 58-x = 48 : 75$, при чемъ $2784 - 48x = 3000 - 75x$ (§ 146), а по переставкѣ членовъ выйдетъ $75x - 48x = 3000 - 2784$, или $27x = 216$; раздѣли на 27, найдется $x = 8$ коп. искомая цѣна переплета.

Задача. XI. На чертѣ, которой длина 125 саж. поставлено неизвѣстное число одинакихъ пушекъ, въ разстояніи одна отъ другой на двѣ пушки; а ежели бы длина черты была 208 саженъ, тогда бы промежутки были вдвое первыхъ; спрашивается число пушекъ.

Рѣшен. Положимъ число пушекъ x, число промежутковъ будетъ $x-1$; но какъ въ каждомъ промежуткѣ поставится 2 пушки, то число пушекъ въ промежуткахъ будетъ $(x-1).2 = 2x-2$; посему число всѣхъ пушекъ сряду

было бы $2x-2+x=3x-2$; а во второмъ случаѣ число пушекъ въ промежуткахъ будетъ $(x-1)\times4=4x-4$, числожъ всѣхъ пушекъ сряду было бы $4x-4+x=5x-4$; по сей причинѣ будетъ $3x-2:5x-4=125:208$; при чемъ $625x-500=624x-416$; а по переставкѣ членовъ выйдетъ $625x-624x=500-416$, то есть $x=84$ искомое число пушекъ.

Задача XII. Нѣкто смотрѣлъ на часы, а другой спросилъ, которой часъ? ему отвѣтствовано, часовая стрѣлка между девятымъ и десятымъ часомъ съ минутною въ одной точкѣ; спрашивается число минутъ десятаго часа.

Рѣшен. Положимъ, часть десятаго часа есть x. Стрѣлка минутная отъ точки, показывающей 12 часовъ, до соединенія съ часовою перейдетъ $x+9$ частей круга въ то время, когда часовая перейдетъ помянутую часть x; и такъ будетъ $x+9:x=12^{\text{част}}:1^{\text{част}}$, при чемъ $12x=x+9$ или $12x-x=9$, то есть $11x=9$, а по раздѣленіи на 11, найдется $x=\frac{9}{11}=49\frac{1}{11}$ минуты, искомое время десятаго часа.

Задача XIII. Два указателя имѣютъ общую ось, коихъ начало движенія послѣдовало отъ одной точки: одинъ описываетъ свой кругъ въ 12 часовъ, а другой тотъ же кругъ въ 16 часовъ; спрашивается, въ какое время они соединятся опять въ прямое положеніе.

Рѣшен. Положа искомое число часовъ x, сдѣлай слѣдующія пропорціи: первую, 12 часовъ къ искомому времени x, какъ одно обращеніе къ

обра-

обращенію перваго указателя въ искомое время, то есть $12 : x = 1 : \frac{1}{12}x$; вторую, $16 : x = 1 : \frac{1}{16}x$; но какъ разность обращеній между первымъ и вторымъ указателемъ до соединенія ихъ въ прямое положеніе есть только одно обращеніе круга, по сей причинѣ будетъ $\frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 1$, откуда найдется $\frac{x}{48} = 1$, или $x = 48 =$ искомому числу часовъ до соединенія указателей въ прямое положеніе.

Прибавлен. Посредствомъ сей задачи разрѣшается и слѣдующее предложеніе: когда *луна* находится между солнцемъ и землею въ одной плоскости вертикальнаго круга, тогда говорится, что солнце въ прямомъ положеніи съ луною, что и называется *новомѣсячіе*. И такъ когда намъ по Астрономическимъ наблюденіямъ извѣстно, что земля совершаетъ свой кругъ въ 365 дней, 5 часовъ, $48\frac{3}{4}$ минуты, или $365\frac{93}{384}$ дней, а луна въ 27 дней 7 часовъ $43\frac{1}{12}$ минуты. или $27\frac{5557}{17280}$, то найдется, въ какое время, считая отъ перваго противустоянія, луна опять придетъ въ прямое положеніе съ землею въ разсужденіи неподвижности солнца, то есть сыщется время отъ одного новомѣсячія до другаго. Для сего положимъ искомое время x, $365\frac{93}{384} = a$, $27\frac{5557}{17280} = b$, отъ чего произойдутъ по силѣ вопроса слѣдующія пропорціи: 1) $a : x = 1 : \frac{x}{a}$, II) $b : x = 1 : \frac{x}{b}$; а изъ сего по предложенной задачѣ будетъ $\frac{x}{b} - \frac{x}{a} = 1$ (то есть разность обращеній луны съ землею есть 1 обращеніе), гдѣ умножь обѣ части уравненія сперва чрезъ b, а потомъ чрезъ a, будетъ $ax - bx = ab$; откуда найдется $x = \frac{ab}{a-b} = (365\frac{93}{384} \times 27\frac{5557}{17280}) : (365\frac{93}{384} - 27\frac{5557}{17280}) = 29$. дней, 12 часовъ. 6 минутъ, полагая равномѣрное земли и луны движеніе.

Задача XIV. Нѣкто имѣетъ двухъ цѣнъ вино, перваго бутылка 45 коп. другаго 32 коп.

изъ коего желаетъ смѣшать 26 бутылокъ, такъ чтобы смѣшаннаго бутылка была въ 40 коп. спраш. сколько бутылокъ каждого вина въ смѣшеніе взять надлежитъ.

Рѣшен. Положимъ $26 = q$, $45 = a$, $32 = b$ $40 = c$, и что перваго вина берется въ смѣшеніе x бутылокъ, втораго, которое меньшей цѣны, будетъ $q - x$. И такъ умножь a числомъ бутылокъ x, произведеніе ax будетъ цѣна бутылокъ хорошаго вина; потомъ умножь b числомъ бутылокъ $q - x$ дешеваго вина, произведеніе $(q - x) b = bq - bx$ будетъ цѣна втораго вина. Сумма сихъ цѣнъ будетъ равна цѣнѣ смѣшиваемаго вина, то есть $26 \times 40 = qc$; по сей причинѣ, $ax + bq - bx = cq$, или (по перестaвкѣ членовъ) $ax - bx = cq - bq$, то есть $x \times (a - b) = q \times (c - b)$, а по раздѣленіи на $a - b$, найдется $x = q \times (\frac{c-b}{a-b}) = 26 \times (\frac{40-32}{45-32}) = 26 \times \frac{8}{13} = 16 =$ числу бутылокъ перваго вина, а $q - x = 26 - 16 = 10 =$ числу бутылокъ дешеваго вина.

Примѣчаніе. Изъ уравненія $x = q \times \frac{c-b}{a-b}$ произойдетъ слѣдующая пропорція: $a - b : c - b = q : x$; слѣдовательно ежели положимъ количество втораго вина $= y$, то будетъ $y = q \times \frac{a-c}{a-b}$, изъ чего выйдетъ $a - b : a - c = q : y$. На сей-то пропорціи основано Ариѳметическое правило смѣшенія; ибо поставя данныя цѣны по правилу Ариѳметическому и учиня дѣйствіе, какъ слѣдуетъ:

a - - - $c - b$ $- c$ b - - - $a - c$	должно будетъ сдѣлать слѣдующую пропорцію: $a - b : c - b = q : x = q \times \frac{c-b}{a-b} =$
сумма $= a - b$	количеству перваго вина; потомъ $a - b :$

$a - c = q : y = q \times \frac{a-c}{a-b} =$ колич. втораго вина.

За-

Задача XV. Серебра фунтъ цѣною $= a$, мѣди фунтъ цѣною $= b$, потребно сдѣлать фунтъ серебра, смѣшаннаго изъ перваго серебра и мѣди, цѣною $= c$; спрашивается сколько котораго металла въ смѣшеніе взять надлежитъ.

Рѣшен. Положимъ, что берется въ смѣшеніе серебра x фунтовъ, мѣди будетъ $1 - x$. Потомъ сдѣлай слѣдующія пропорціи: 1) одинъ фунтъ содержится къ x, какъ цѣна одного фунта серебра къ цѣнѣ того серебра, которое положится въ смѣшеніе, то есть $1 : x = a : ax$, 11) $1 : 1 - x = b : b - bx$. Сумма сихъ найденныхъ цѣнъ будетъ равна положенной въ вопросѣ цѣнѣ c, то есть $ax - bx + b = c$, а переставя члены будетъ $ax - bx = c - b$ или $(a - b)x = c - b$, откуда найдется $x = \frac{c-b}{a-b}$. Или по обыкновенному Ариѳметическому правилу:

$$\begin{array}{lcl|l} b & - & a - c & = \frac{a-c}{a-b} \text{ столько должно взять мѣди} \\ -c & & & \\ a & - & c - b & = \frac{c-b}{a-b} \text{ столько серебра въ смѣшеніе} \\ \hline \text{сумма } a - b & & & \text{положить должно.} \end{array}$$

И такъ положимъ что фунтъ даннаго серебра стоитъ 24 рубл. 50 коп. мѣди 50 коп. а фунтъ требуемаго серебра 16 рублей 50 коп.; то будетъ $a = 2450$, $b = 50$, $c = 1650$; посему $x = \frac{c-b}{a-b} = \frac{1650-50}{2450-50} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ фунта $=$ искомому числу серебра, а мѣди $\frac{1}{3}$ фунта. Но дабы увѣриться о справедливости сего вопроса, то $\frac{2}{3} \times 2450 = 1633\frac{1}{3}$. и $\frac{1}{3} \times 50 = 16\frac{2}{3}$, коихъ сумма $1633\frac{1}{3} + 16\frac{2}{3} = 1650 =$ цѣнѣ требуемаго серебра.

Задача XVI. Нѣкто имѣетъ вино двухъ сортовъ такой цѣны, что ежели смѣшать 2 кружки хорошаго съ 3мя дешеваго, то смѣшаннаго кружка будетъ стоить 21 коп.; а когда 7 кружекъ хорошаго смѣшать съ 8ю дешеваго, то цѣна кружки смѣшаннаго будетъ 22 коп. спраш. цѣна кружки каждаго вина.

Рѣшен. Пусть будетъ цѣна кружки хорошаго вина x, дешеваго y, то будетъ I) $2x+3y=5\times21=105$, II) $7x+8y=15\times22=330$. Изъ перваго уравненія найдется $x=\frac{105-3y}{2}$, а изъ втораго $x=\frac{330-8y}{7}$; потомъ составя изъ найденныхъ равныхъ количествъ уравненіе $\frac{330-8y}{7}=\frac{105-3y}{2}$, умножъ каждую часть чрезъ 7 и 2 выйдетъ $660-16y=735-21y$, а переставя члены, будетъ $21y-16y=735-660$, или $5y=75$, откуда найдется $y=\frac{75}{5}=15=$ цѣнѣ дешеваго вина, а цѣна хорошаго вина $x=\frac{105-3y}{2}=\frac{105-45}{2}=30$.

Задача. XVII. Двадцать фунтовъ золота вѣсятъ въ водѣ 19 фунтовъ, 11 фунтовъ серебра вѣсятъ въ водѣ 10 фунтовъ; спрашивается, сколько будетъ золота и серебра въ такомъ кускѣ, которой во 106 фунтовъ вѣситъ въ водѣ 98 фунтовъ.

Рѣшен. Положимъ, что въ кускѣ содержится золота x фунтовъ, серебра будетъ $106-x$.

106—x. И такъ по свойству вопроса, будетъ $20 : x = 19 : \frac{19x}{20} =$ вѣсящему количеству въ водѣ золота, находящагося въ кускѣ; потомъ $11 : 106 - x = 10 : \frac{(106 - x).10}{11} =$ вѣсящему количеству въ водѣ серебра, находящагося въ кускѣ. Сумма сихъ найденныхъ количествъ будетъ равна тому количеству, которое данной кусокъ вѣситъ въ водѣ, то есть $\frac{19x}{20} + \frac{1060 - 10x}{11} = 98$; умножь каждую часть сего уравненія чрезъ 20 и чрезъ 11, выйдетъ $209x - 200x + 21200 = 21560$, въ коемъ переставя члены и сократя одинакія величины будетъ $9x = 360$, а по раздѣленіи на 9, найдется $x = \frac{360}{9} = 40 =$ искомому числу фунтовъ золота, а серебра будетъ $106 - x = 106 - 40 = 66$ фунтовъ.

Задача XVIII. *Нѣкто имѣетъ три равновѣсные слитка, составленные изъ разныхъ металловъ, первой состоитъ*

изъ 7 лот. серебр. 3 лот. мѣд. и 6 лот. олов. = 16
2й, 12 лот. серебр. 3 лот. мѣд. и 1 лот. - - = 16
3й, 4 - *7* - *5* - - - = 16

изъ коего желаетъ составить четвертой кусокъ, въ которомъ бы содержалось 8 лотовъ серебра, $3\frac{3}{4}$ лот. мѣди, $4\frac{1}{4}$ олова; спрашивается, сколько должно взять отъ каждаго изъ помянутыхъ слитковъ въ смѣшеніе требуемаго куска.

Рѣшен. Положимъ, взять должно число лотовъ отъ перваго куска x, отъ втораго y, отъ третьяго z; но

какъ каждой кусокъ изъ данныхъ вѣсомъ 16 лотовъ, то надлежитъ сдѣлать слѣдующую пропорцію: 16 лот. содержится къ требуемому количеству x перваго куска, какъ 7 лот. серебра, находящагося въ немъ, будетъ содержаться къ количеству серебра, слѣдующему въ смѣшеніе отъ перваго куска, то есть $16 : x = 7 : \frac{7x}{16}$; равнымъ образомъ $16 : y = 12 : \frac{12y}{16} =$ количеству серебра отъ втораго куска; также $16 : z = 4 : \frac{4z}{16} =$ количеству серебра отъ третьяго куска. Сумма сихъ найденныхъ количествъ $\frac{7x}{16} + \frac{12y}{16} + \frac{4z}{16} = 8 =$ количеству серебра требуемаго куска, или $7x + 12y + 4z = 128$. Потомъ сдѣлай сію пропорцію: 16 лотовъ содержится къ требуемому количеству x перваго куска, какъ 3 лота находящейся въ немъ мѣди будетъ содержаться къ количеству мѣди, слѣдующей въ смѣшеніе отъ перваго куска, то есть $16 : x = 3 : \frac{3x}{16}$; равнымъ образомъ сыщи количество слѣдующей въ смѣшеніе мѣди отъ втораго куска чрезъ слѣдующую пропорцію: $16 : y = 3 : \frac{3y}{16}$; также и $16 : z = 7 : \frac{7z}{16} =$ количеству мѣди отъ третьяго куска. Сумма сихъ найденныхъ количествъ $\frac{3x + 3y + 7z}{16} = 3\frac{3}{4}$ или $3x + 3y + 7z = 60$. Наконецъ сыщи подлежащія части олова въ требуемое отъ каждаго куска смѣшеніе такимъ образомъ: $16 : x = 6 : \frac{6x}{16}$, также $16 : y = 1 : \frac{y}{16}$; и $16 : z = 5 : \frac{5z}{16}$, коихъ сумма $\frac{6x + y + 5z}{16} = 4\frac{1}{4}$ или $6x + y + 5z = 68$, отъ чего произошли три слѣдующія уравненія: I) $7x + 12y + 4z = 128$, II) $3x + 3y + 7z = 60$, III) $6x + y + 5z = 68$, изъ коихъ въ первомъ найдется $x = \frac{128 - 12y - 4z}{7}$, во второмъ $x = \frac{60 - 3y - 7z}{3}$, въ третьемъ $x = \frac{68 - y - 5z}{6}$. Составь изъ сихъ равныхъ ко-

количествъ два слѣдующія уравненія: I) $\frac{128-12y-4z}{7}$ $=\frac{60-3y-7z}{3}$, II) $\frac{60-3y-7z}{3}=\frac{68-y-5z}{6}$, изъ коихъ въ первомъ, по умноженіи каждой части чрезъ 3 и 7, будетъ $384-36y-12z=420-21y-49z$, въ коемъ переставя члены выйдетъ $49z-12z=420-384+36y-21y$, или $37z$ $=36+15y$, а по раздѣленіи на 37, найдется $z=\frac{36+15y}{37}$. Во второмъ умножа каждую часть чрезъ 3 и 6, будетъ $204-3y-15z=360-18y-42z$, гдѣ переставя члены, выйдетъ $42z-15z=360-204+3y-18y$, или $27z=156-15y$, а по раздѣленіи на 27 найдется $z=\frac{156-15y}{27}=\frac{52-5y}{9}$. Напослѣдокъ изъ сихъ двухъ равныхъ y количествъ составь послѣднее уравненіе $\frac{36+15y}{37}=\frac{52-5y}{9}$, откуда найдется $y=5$ лот. $=$ тому вѣсу, сколько должно взять отъ втораго куска. Также $z=\frac{52-5y}{9}=\frac{52-25}{9}=3=$ числу лотовъ, сколько слѣдуетъ взять отъ третьяго; равнымъ образомъ $x=\frac{68-y-5z}{6}=\frac{68-5-15}{6}=\frac{48}{6}=8=$ числу лотовъ, которое должно взять отъ перваго куска.

Задача XIX. *Кубической футъ морской воды вѣситъ 72 фунта, дождевой $69\frac{1}{2}$, колодезной 71 фунтъ, найти, какія части кубическаго фута взять должно морской воды и дождевой, дабы она сдѣлалась одной тяжести съ колодезною.*

Рѣшен. Положимъ, взять должно дождевой воды x фут. морской, будетъ $1-x$; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ кубической футъ содержится къ искомой части x дождевой воды, такъ вѣсъ кубическаго фута дождевой воды къ вѣсу той части кубическаго фута, которую составляетъ искомая дождевая вода, то есть $1:x=69\frac{1}{2}:69\frac{1}{2}x$; потомъ: кубической футъ морской воды содержится къ искомой части $1-x$ той

же

же воды, какъ вѣсъ кубическаго фута оной воды къ вѣсу искомой части, то есть $1 : 1-x = 72 : (1-x).72 = 72-72x$; но какъ сіи найденныя части, вмѣстѣ взятыя, должны быть равны вѣсу колодезной воды, того ради будетъ $69\frac{1}{2}x+72-72x=71$, или $72-2\frac{1}{2}x=71$, а по переставкѣ членовъ $72-71=2\frac{1}{2}x$, или $1=2\frac{1}{2}x$, раздѣли обѣ части на $2\frac{1}{2}$, найдется $x=\frac{2}{5}=$ части кубическаго фута дождевой воды, а морской $1-x=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$; кои вмѣстѣ взятыя равны кубическому футу, и одного вѣса съ колодезною.

Задача XX. Данъ вѣсъ тѣла $D=m$ фунтовъ, составленнаго изъ двухъ тѣлъ A и B, найти, сколько котораго изъ сихъ тѣлъ взято въ смѣшеніе.

Рѣшен. Положимъ вѣсъ m тѣла D теряетъ въ водѣ a фунтовъ, тѣло $A=d$ фунт. теряетъ въ водѣ b фунтовъ, а тѣло $B=n$ фунтовъ теряетъ въ водѣ c фунтовъ; также въ тѣлѣ D тяжелаго тѣла A x фунтовъ, то тѣла B въ тѣлѣ D будетъ $m-x$ фунт. отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: I) вѣсъ тѣла A къ потерянному въ водѣ вѣсу того же тѣла, какъ искомой вѣсъ сего тѣла, заключающійся въ тѣлѣ D, къ потерянію въ водѣ своего вѣса, то есть $d : b = x : \frac{bx}{d} =$ той части вѣса, которую теряетъ въ водѣ x фунт. II) $n : c = m-x : \frac{(m-x)c}{n} =$ той части, которую теряетъ въ водѣ $m-x$ фунт. Но какъ найденныя части, вмѣстѣ взятыя, должны быть равны потерянію вѣса въ водѣ даннымъ тѣломъ D, то сумма ихъ будетъ $\frac{bx}{d}+\frac{(m-x)c}{n}=a$. Умножь каждую часть чрезъ d и n, будетъ $nbx+mdc-dcx=and$, или $nbx-dcx=and-mdc$, откуда найдется $x=\frac{and-mdc}{nb-dc}=$ вѣсу тѣла A, заключающемуся въ данномъ тѣлѣ D; также и часть тѣла B, содержащагося въ тѣлѣ D $m-x=m-\frac{(an-mc)d}{nb-dc} = \frac{mnb-and}{nb-dc}$.

За-

Задача XXI. Одинъ крестьянинъ мѣнялъ зайцовъ на домашнихъ курицъ, бралъ за всякихъ двухъ зайцовъ по три курицы; каждая курица снесла яицъ третью часть противъ числа всѣхъ курицъ. Крестьянинъ, продавая яицы, бралъ за каждыя девять яицъ по стольку копѣекъ, сколько каждая курица яицъ снесла, за которыя выручилъ онъ 24 алтына; спрашивается число яицъ и курицъ.

Рѣшен. Положимъ число зайцовъ x, число курицъ найдется чрезъ слѣдующую пропорцію: $2:3=x:\frac{3x}{2}$. Каждая курица снесла яицъ $\frac{x}{2}$, посему число всѣхъ яицъ будетъ $\frac{3x}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{3x^2}{4}$; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: $9:\frac{3x^2}{4}=\frac{x}{2}:\frac{3x^3}{72}=\frac{x^3}{24}=$ числу вырученныхъ денегъ, то есть $\frac{x^3}{24}=72$, или $x^3=24.72=8.8.27$, откуда найдется $x=\sqrt[3]{8.8.27}=2.2.3=12=$ числу зайцовъ; числожъ курицъ $\frac{3x}{2}=18$.

Задача XXII. Два человѣка A и B пошли въ одно время съ разныхъ мѣстъ по одной дорогѣ, и по схожденіи ихъ нашлось, что человѣкъ A перешелъ 30 верстъ больше, нежели B, и притомъ A сказалъ B: я бы твое разстояніе могъ перейти въ 4 дни, а B сказалъ A, а я твое разстояніе могъ бы перейти въ 9 дней; спрашивается разстояніе мѣстъ.

Рѣшен.

Рѣшен. Положимъ перейденное разстояніе человѣкомъ $B = x$, то A перешелъ $x + 30$, по сей причинѣ произойдутъ слѣдующія пропорціи: $x : x + 30 = 4 : \frac{4x + 120}{x}$ (время, въ которое A перейдетъ свое разстояніе); потомъ $x + 30 : x = 9 : \frac{9x}{x + 30}$ (время въ которое B перейдетъ свое разстояніе); но какъ времена продолженія ихъ путей суть равны, посему будетъ $\frac{9x}{x + 30} = \frac{4x + 120}{x}$; откуда найдется $9x^2 = 4x^2 + 240x + 3600$, въ которомъ по перенесеніи членовъ, выйдетъ $5x^2 - 240x = 3600$, а по раздѣленіи на 5 будетъ $x^2 - 48x = 720$, откуда найдется $x = 24 \pm \sqrt{1296} = 24 + 36 = 60$, столько верстъ перешелъ B, и A перешелъ $x + 30 = 60 + 30 = 90$; между коими разстоянія было $60 + 90 = 150$ верстъ.

Задача XXIII. Два купца положили въ торгъ 140 рублей, коими приторговали 130 рублей, по раздѣлу у перваго нашлось и съ прибыткомъ 120 роблей, котораго деньги въ торгу были 2 мѣсяца, у втораго нашлось 150 рубл. а въ торгу были 6 мѣсяцовъ; спрашив. сколько которой въ торгъ денегъ положилъ.

Рѣшен. Пусть число положенныхъ въ торгъ денегъ перваго x, втораго будетъ $140 - x$. Прибытокъ перваго $120 - x$, втораго $150 - 140 + x = 10 + x$; отъ сего произойдутъ слѣдующія пропорціи: $2x : 6(140 - x) = 120 - x : 10 + x$ (поелику прибытки въ сложномъ содержаніи временъ и капитальныхъ денегъ), или по раздѣленіи на 2, будетъ $x : 3(140 - x) = 120 - x : 10 + x$

при

при чемъ будетъ $3x^2-780x+50400=x^2+10x$, въ коемъ переставя члены и раздѣля каждую часть на 2, будетъ $x^2-395x=-25200$, откуда найдется $x=\frac{395}{2}\pm\sqrt{(\frac{156025}{4}-25200)}=\frac{395}{2}\pm\frac{235}{2}$ $=80=$ числу капитальныхъ денегъ перваго, а прибытокъ его $120-80=40$; числожъ капитальныхъ денегъ втораго будетъ $140-80=60$, а прибытокъ его будетъ $150-60=90$ рублей.

Примѣчан. Въ семъ вопросѣ произошло одно только рѣшеніе, принявъ отрицательной корень; ибо естьли возмется положительной корень $\frac{235}{2}$, то число денегъ перваго x будетъ $=315$ больше, нежели общая ихъ сумма.

Задача XXIV. Нѣкто купилъ лошадь за неизвѣстное число рублей, а продалъ оную за 119 рублей, при чемъ получилъ на 100 рубл. столько прибытку, чего вся лошадь стоила; спрашивается, сколько онъ за нее денегъ заплатилъ.

Рѣшен. По предъидущимъ правиламъ найдется, что за лошадь заплачено 70 рубл.

Задача. XXV. Двѣ крестьянки продали 100 яицъ, изъ коихъ у одной было больше другой, денегъ же выручили по ровну. Первая сказала другой: ежели бы твои яицы были у меня, то бы я выручила 15 алтынъ; а другая отвѣтствовала, а я бы за твои яицы взяла $6\frac{2}{3}$ алтына; спрашивается, сколько у каждой яицъ было.

Рѣшен. Соображаясь съ предъидущими правилами, найдется, что у первой было 40 яицъ, а у второй 60.

Задача XXVI. Два купца продали нѣсколько аршинъ бархату, изъ коихъ второй 3 аршина боль-

больше перваго, а выручили вмѣстѣ 35 рублей; послѣ продажи первой сказалъ другому: я бы за твой бархатъ могъ взять 24 рубли; другой ему отвѣтствовалъ: а я бы за твой бархатъ получилъ $12\frac{1}{2}$ рублей; спрашивается сколько аршинъ каждой изъ нихъ имѣлъ.

Рѣшен. Положимъ, у перваго было x арш. то у втораго будетъ $x+3$ арш. Но поелику ежели бы первой могъ продать $x+3$ за 24 рубли, то за какую бы онъ цѣну продалъ свои x аршинъ, что найдется чрезъ слѣдующую пропорцію: $x+3:24=x:\frac{24x}{x+3}$; такимъ же образомъ сыщи цѣну, за какую второй продалъ свое сукно, чрезъ слѣдующую пропорцію: $x:12\frac{1}{2}=x+3:\frac{x+3}{x}\times\frac{25}{2}=\frac{25x+75}{2x}$. Сумма сихъ найденныхъ цѣнъ будетъ $\frac{25x+75}{2x}+\frac{24x}{x+3}=35$, а умножа каждую часть чрезъ $2x$, и $x+3$, будетъ $73x^2+150x+225=70x^2+210x$, въ коемъ переставя члены, выйдетъ $3x^2-60x=-225$, а по раздѣленіи каждой части на 3, будетъ $x^2-20x=-75$; откуда найдется $x=10\pm\sqrt{(100-75)}=10\pm5=$ числу аршинъ перваго, а втораго будетъ $10\pm5+3$.

Примѣчаніе. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія: по первому первой имѣетъ 15 аршинъ, а другой 18; но какъ первой за 18 аршинъ получилъ бы 24 рубли, то за свои 18 взялъ онъ 20 рубл; другой за 15 аршинъ взялъ бы $12\frac{1}{2}$ рублей, то за свои 18 взялъ онъ 15 рубл. коихъ сумма $=$ 35 рубл. По второму рѣшенію первой имѣлъ 5 аршинъ, а другой 8, и когда первой продалъ бы 8 аршинъ за 24 рубли, то свои 5 арш. продалъ за 15 рублей, другой

гой 5 аршинъ перваго продалъ бы за $12\frac{1}{2}$, то свои 8 арш. продалъ онъ за 20 рубл. коихъ сумма также $= 35$ рубл.

Задача XXVII. *Купецъ торгуетъ положенными въ торгъ 100000 рублями съ убыткомъ, такъ что оставшаяся сумма послѣ перваго года безъ $\frac{4}{25}$ всего капитала равна оставшейся суммѣ послѣ двухъ лѣтъ; спраш. сколько онъ теряетъ отъ 100 рубл въ каждой годъ.*

Рѣшен. Пусть будетъ 100000 рубл. $= a$, $\frac{4a}{25} = b$, $100 = n$, искомое число $= x$. И такъ сдѣлай сію пропорцію: $100 : 100 - x = a : a \times \frac{100 - x}{100} = a.(1 - \frac{x}{100}) =$ количеству капитала послѣ перваго года; потомъ естьли сдѣлать еще слѣдующую пропорцію: $100 : 100 - x = a.(1 - \frac{x}{100}) : a \times \frac{100 - x}{100} \times \frac{100 - x}{100} = a.(1 - \frac{x}{100}).(1 - \frac{x}{100}) = a.(1 - \frac{x}{100})^2 = \frac{a.(n - x)^2}{nn} =$ оставшейся суммѣ послѣ двухъ лѣтъ, которая по силѣ вопроса равна $a \times \frac{100 - x}{100}$ безъ количества b, то есть $a \times \frac{(n - x)^2}{nn} = a \times \frac{n - x}{n} - b = a \times \frac{n - x}{n} - \frac{bn}{n}$, а умножа числителя и знаменателя второй части чрезъ n, будетъ $a \times \frac{(n - x)^2}{nn} = a \times \frac{n^2 - nx}{nn} - \frac{bnn}{nn}$; по раздѣленіижъ на a, и уничтоживъ знаменателей, выйдетъ $(n - x)^2 = n^2 - nx - \frac{bnn}{a}$, или $n^2 - 2nx + x^2 = n^2 - nx - \frac{bnn}{a}$, въ которомъ переставя величины изъ одной части въ другую, будетъ $x^2 - nx = -\frac{bnn}{a}$, откуда найдется $x = \frac{n}{2} \pm \sqrt{(\frac{nn}{4} - \frac{bnn}{a})} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{(1 - \frac{4b}{a})\frac{n^2}{4}}$

$= \frac{n}{2} \pm \frac{n}{2} V(1 - \frac{4b}{a}) = \frac{n}{2} \pm \frac{n}{2} V(1 - \frac{16a}{25a}) = \frac{n}{2} \pm \frac{n}{2} V(1 - \frac{16}{25})$ $= \frac{n}{2} \pm \frac{n}{2} V \frac{9}{25} = \frac{n}{2} \pm \frac{n}{2} \cdot \frac{3}{5}$, то есть $x = 50 \pm 50 \times \frac{3}{5} = 50 \pm 30 = 80$, или $x = 50 - 30 = 20$. *) Естьли бы положено было $b = \frac{a}{3}$, то бы сей вопросъ былъ не возможной, поелику въ семъ случаѣ выйдетъ $x = 50 \pm 50 V - \frac{1}{3}$ количество мнимое.

Задача XXVIII Одинъ изъ двухъ человѣкъ перешелъ въ 3 часа 15 верстъ, а другой въ пять часовъ 30 верстъ; спрашив. котораго скорость больше.

Рѣшен. Положимъ, скорость перваго x, втораго y. Но поелику въ механикѣ доказывается, что въ уравненномъ движенiи перейденныя пространства въ сложномъ содержанiи скоростей и временъ; по сей причинѣ будетъ $15 : 30 = 3x : 5y$, или по раздѣленiи предъидущихъ членовъ на 3, а послѣдующихъ на 5, будетъ $x : y = 5 : 6$, то есть скорость перваго къ скорости втораго какъ 5 къ 6; изъ сего видно, что скорость втораго въ одинъ часъ одною верстою больше перваго. Тожъ самое можно рѣшить и другимъ образомъ: поелику въ механикѣжъ доказывается, что скорости въ сложномъ содержанiи изъ прямаго

*) По второму рѣшенiю останется послѣ перваго года 80000 рубл. и 64000 рубл. послѣ втораго года, и притомъ 80000 — 16000 рубл. $= 80000 - \frac{4a}{25}$. По первомужъ рѣшенiю останется послѣ перваго года 20000 и $20000 - \frac{4a}{25} = 4000$ послѣ втораго года.

маго содержанія перейденныхъ пространствъ и обратнаго временъ, по сему $x : y = 15 \times 5 : 30 \times 3 = 75 : 90$, а по раздѣленіи членовъ втораго содержанія на 15, будетъ $x : y = 5 : 6$.

Прибавлен. Посредствомъ сего правила познается содержаніе движимыхъ планетъ кругомъ солнца (пріемля ихъ движеніе уравненнымъ) слѣдующимъ образомъ: положимъ, что скорость одной какой нибудь планеты движущейся около солнца $= V$, разстояніе ея отъ солнца $= D$, періодическое время возвращенія T *); другой планеты скорость v, разстояніе ея d, періодическое время t; то по предъидущей задачѣ будетъ $VT : vt = D : d$, поелику радіусы содержатся между собою какъ окружности круговъ (*Курсъ Матем.* *часть* II. § 248.), а по раздѣленіи предъидущихъ членовъ на V, а послѣдующихъ на v, будетъ $T : t = \frac{D}{V} : \frac{d}{v}$, или по раздѣленіи помянутыхъ членовъ на T и t будетъ $V : v = \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$. Возвысь члены сихъ пропорцій во вторую степень, будетъ $V^2 : v^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ и $T^2 : t^2 = \frac{D^2}{V^2} : \frac{d^2}{v^2}$; но по свойству, доказанному Г. *Кеплеромъ*, квадраты періодическихъ временъ содержатся между собою, какъ кубы изъ разстояній планетъ отъ солнца, по сему $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$; и такъ для равенства содержаній будетъ $D^3 : d^3 = \frac{D^2}{V^2} : \frac{d^2}{v^2}$, а по раздѣленіи предъидущихъ членовъ на D^2, а послѣдующихъ на d^2, будетъ $D : d = \frac{1}{V^2} : \frac{1}{v^2} = v^2 : V^2$ (§ 151), по сему $V^2 : v^2 = d : D$; естьлижъ извлечешь изъ каждаго члена квадратной корень, то будетъ $V : v = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, то есть скорости двухъ планетъ въ обратномъ содержаніи квадратныхъ корней изъ ихъ разстояній.

 За-

*) *Періодическое время возвращенія планеты* есть то, въ которое она опять возвращается въ тоже положеніе въ разсужденіи земли, отъ котораго замѣчено начало ея движенія.

Задача XXIX. *Найти число, которое ежели придастся къ 15, 27 и 45, то бы вышла непрерывная Геометрическая пропорція.*

Рѣшен. Положимъ искомое число x, то произойдетъ слѣдующая пропорція: $\div 15 + x : 27 + x : 45 + x$, при чемъ произведеніе крайнихъ членовъ равно квадрату средняго члена, то есть $(15 + x) \times (45 + x) = (27 + x)^2$ или $x^2 + 60x + 675 = x^2 + 54x + 729$, въ коемъ найдется $x = 9$. И такъ произойдетъ непрерывная пропорція слѣдующая: $\div 24 : 36 : 54$.

Задача XXX. *Непрерывной Геометрической пропорціи извѣстна сумма крайнихъ членовъ $= a$, среднiй членъ $= b$, найти первой и послѣднiй члены.*

Рѣшен. Положимъ первой членъ x, отъ чего произойдетъ слѣдующая пропорція: $\div x : b : a - x$, при чемъ $b^2 = ax - x^2$, или переставя члены изъ одной части въ другую, будетъ $x^2 - ax = -b^2$, откуда найдется $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Пусть будетъ $a = 10$, $b = 4$, то будетъ первой членъ $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} = 5 \pm \sqrt{(25 - 16)} = 5 \pm 3 = 8$, а послѣднiй $a - x = 10 - 8 = 2$, и отъ сего произойдетъ слѣдующая пропорція: $\div 8 : 4 : 2$.

Задача XXXI. *Данъ знаменатель b, число членовъ n, и сумма прогрессіи S, найти первой и послѣднiй членъ.*

Рѣшен. Положимъ, первой членъ x, послѣднiй членъ y будетъ $= xb^{n-1}$ (§ 161. слѣд. III), а сумма прогрессіи $S = \frac{xb^n - x}{b - 1}$ или $S.(b - 1) = xb^n - x$, а по раздѣленіи обѣихъ частей уравненія на $b^n - 1$ будетъ $x = \frac{S \times (b - 1)}{b^n - 1}$; послѣднiй же членъ $y = \frac{S.(b - 1)}{b^n - 1} \times b^{n-1}$. Пусть $b = 3$, $n = 5$, и $S = 242$; то будетъ $x = \frac{S.(b - 1)}{b^n - 1} = \frac{242 \times 2}{243 - 1} = 2$, а послѣднiй членъ $y = xb^{n-1} = 2.81 = 162$.

За-

Задача XXXII. *Извѣстенъ первой членъ a, и разность втораго члена съ третьимъ $=b$; найти второй и третiй членъ непрерывной Геометрической пропорцiи.*

Рѣшен. Положимъ, второй членъ x, третiй будетъ $x+b$; по сей причинѣ произойдетъ слѣдующая пропорцiя: $\div a : x = x : x+b$, при чемъ $x^2 = ax+ab$, въ коемъ переставя члены, будетъ $x^2-ax=ab$; откуда найдется $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(ab+\frac{1}{4}a^2)} =$ второму члену, а третiй будетъ $= \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(ab+\frac{1}{4}a^2)}+b$. Пусть будетъ $a=4$, $b=8$, то выйдетъ $x=\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(ab+\frac{1}{4}a^2)} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{(32+4)} = 2 \pm \sqrt{36} = 2+6 = 8$, третiй $x+b=8+8=16$.

Задача XXXIII. *Кавалерiйской Офицеръ продаетъ коня такимъ образомъ: за первой подковной гвоздь проситъ одну полушку, за второй 2, за третiй 4 и такъ далѣе въ прогрессiи Геометрической, гвоздей же было 24; найти цѣну коня.*

Рѣшен. Положимъ, первой членъ $1=a$, знаменатель прогрессiи $2=b$, число членовъ $24=c$, сумма прогрессiи x: то послѣднiй членъ прогрессiи будетъ ab^{23}, по сему $x = 2ab^{23} - a$ (*) $= 2.1.(2)^{23}-1 = (2)^{24}-1 = 41943$ рубл. $3\frac{3}{4}$ коп. $=$ цѣнѣ коня.

Задача XXXIV. *Найти четыре числа въ прогрессiи Геометрической, изъ коихъ бы сумма крайнихъ была $=a$, а сумма среднихъ $=b$.*

Рѣшен. Положимъ, второй членъ прогрессiи x, третiй y, то первой будетъ $=\frac{x^2}{y}$, а четвертой $\frac{y^2}{x}$ (§ 160. прибавл. I); отъ чего произойдетъ слѣдующая про-

*) § 169, Слѣдствiе II.

прогрессія: $\div \frac{x^2}{y} : x = y : \frac{y^2}{x}$, при чемъ сумма крайнихъ $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = a$, а сумма среднихъ $x + y = b$, или $x = b - y$. Изъ перваго уравненія по умноженіи обѣихъ частей чрезъ x и y, будетъ $x^3 + y^3 = axy$. Возвысь каждую часть втораго уравненія $x = b - y$ въ третью степень, будетъ $x^3 = b^3 - 3b^2y + 3by^2 - y^3$; поставь сію величину въ первомъ уравненіи вмѣсто x^3, а вмѣсто ayx напиши $ay(b-y)$, будетъ $b^3 - 3b^2y + 3by^2 - y^3 + y^3 = ay(b-y)$, или $b^3 - 3b^2y + 3by^2 = aby - ay^2$, въ коемъ переставя члены, выйдетъ $3by^2 + ay^2 - 3b^2y - aby = -b^3$, или $(y^2 - by) \times (3b + a) = -b^3$, а по раздѣленіи на $3b + a$, будетъ $y^2 - by = \frac{-bbb}{3b+a}$. откуда найдется $y = \frac{1}{2}b \pm V\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{bbb}{3b+a}\right)$. Положимъ, что $a = 27$, $b = 18$, то будетъ $y = \frac{18}{2} \pm V\left(\frac{324}{4} - \frac{5832}{54+27}\right) = 9 \pm V(81 - 72) = 9 \pm 3 = 12 =$ третьему члену; а второй $x = b - y = 18 - 12 = 6$, по сему первой $\frac{x^2}{y} = \frac{36}{12} = 3$, а четвертой $\frac{y^2}{x} = \frac{144}{6} = 24$; и такъ будетъ прогрессія: $\div 3 : 6 : 12 : 24$.

Задача XXXV. *Въ прогрессіи Геометрической извѣстна сумма трехъ членовъ $= a$, и сумма ихъ квадратовъ $= b$, найти члены прогрессіи.*

Рѣшен. Положимъ первой членъ x, второй y, третій будетъ $\frac{y^2}{x}$, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія: I) сумма искомыхъ членовъ $x + y + \frac{yy}{x} = a$, или $x^2 + xy + y^2 = ax$, II) сумма квадратовъ $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b$, или $x^4 + x^2y^2 + y^4 = bx^2$; переставь въ первомъ уравненіи величину xy, изъ первой части во вторую, выйдетъ $x^2 + y^2 = ax - xy = (a - y)x$; потомъ придай къ обѣимъ частямъ втораго уравненія

x^2y^2

x^2y^2, будетЪ $x^4+2x^2y^2+y^4=bx^2+x^2y^2$; извлеки изЪ обѣихЪ частей сего уравненія квадратные корни, будетЪ $x^2+y^2=\sqrt{(bx^2+x^2y^2)}=\sqrt{(b+y^2)x^2}$; но $x^2+y^2=(a-y)x$ (E), по сему $(a-y)x=\sqrt{(b+y^2)x^2}$; возвысь каждую часть сего уравненія во вторую степень, будетЪ $(a-y)^2.x^2=(b+y^2)x^2$, а по раздѣленіи на x^2 выйдетЪ $(a-y)^2=b+y^2$, то есть $a^2-2ay+y^2=b+y^2$, вЪ коемЪ переставя члены, будетЪ $a^2-b=2ay$, а по раздѣленіи на $2a$ найдется $y=\frac{aa-b}{2a}$. Поставь $\frac{aa-b}{2a}$ вЪ уравненіи (E) вмѣсто y, будетЪ $x^2+(\frac{aa-b}{2a})^2=(a-\frac{aa+b}{2a})x=(\frac{aa+b}{2a})x$, апереставя члены, выйдетЪ, $x^2-(\frac{aa+b}{2a})x=-(\frac{aa-b}{2a})^2$; откуда найдется $x=\frac{aa+b}{4a}\pm\sqrt{(\frac{aa+b}{4a})^2-(\frac{aa-b}{2a})^2}$. НаконецЪ по извѣстнымЪ двумЪ первымЪ членамЪ сыщется и третій членЪ непрерывной Геометрической пропорціи.

§ 177. Правило фальшивое вЪ Ариѳметикѣ одного положенія основано на слѣдующемЪ: ежели отЪ количества x произойдетЪ уравненіе $mx=p$ *), также и изЪ другаго произвольно взятаго количества a (что называется положеніемЪ) произойдетЪ $ma=A$, то будетЪ $A:a=p:x$; ибо $p:x=m:1$ и $A:a=m:1$ (§ 147. слѣд. II.); посему и $A:a=p:x$. И такЪ, на примѣрЪ, *требуется найти такое число, котораго бы половина, четверть и пятая часть составляли число 456.* ПоложимЪ искомое число x, число по примѣру взятое, $20=a$, котораго $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}a=\frac{20}{2}+\frac{20}{4}+\frac{20}{5}=19=A$, и $456=p$, отЪ чего произойдетЪ слѣдующая пропорція: $A:a=p:x$; или $19:20=456:x=480$,

*) Здѣсь вмѣсто m всякое число положить можно.

то есть сумма частей 19 по примѣру положеннаго числа къ цѣлому положенію 20, какъ данная сумма частей искомаго числа 456 къ искомому x. Тожъ должно разумѣть и о другихъ вопросахъ.

§ 178. Правило фальшивое двухъ положеній основаніе свое имѣетъ на слѣдующемъ: ежели изъ количества x произошло уравненіе $nx+d=p$, и изъ другихъ двухъ a и b тѣмъ же образомъ произведены уравненія $na\pm d=A$ и $nb\pm d=B$. И такъ естьли положимъ, $p-A=E$ и $p-B=C$, то будетъ $E:C=x-a:x-b$; ибо $p-A=nx+d-na-d=nx-na=(x-a)n=E$, также и $p-B=nx+d-nb-d=nx-nb=(x-b)n=C$; изъ чего въ разсужденіи равенства количествъ произойдетъ слѣдующая пропорція: $E:C=(x-a)n:(x-b)n=x-a:x-b$ (по раздѣленіи на n); при чемъ $Ex-Eb=Cx-aC$ (§ 146), откуда найдется $x=\frac{Eb-aC}{E-C}$ *). И такъ пусть на примѣръ:

Нѣкто нанялъ слугу на годъ съ такимъ условіемъ, чтобы дать ему 20 рубл и пару платья; но слуга по прошествіи 7 мѣсяцовъ получилъ только пару платья и 3 рубли денегъ; спрашивается цѣна платья. Положимъ по примѣру: I) цѣна платья 10 рубл. $=a$, и такъ слуга за годъ долженъ получить $20+10=30$, а за 7 мѣсяцовъ ему достанется $17\frac{1}{2}$ рублей (§ 160); посему долженъ онъ получить $17\frac{1}{2}-10$ $=$

*) Здѣсь количества a и b суть положенія или по примѣру взятыя числа, а количества E и C погрѣшности или разности между истиннымъ количествомъ и по примѣру взятыми числами.

$=7\frac{1}{2}=$A. Но какъ здѣсь должно быть 3 рубли $=p$, то погрѣшность сего перваго положенія будетъ $p-A=3-7\frac{1}{2}=-4\frac{1}{2}=E$. II) Пусть цѣна платья 8 рубл. $=b$, то за 12 мѣсяцовъ слуга долженъ получить $20+8=28$, а за 7 мѣсяцовъ найдется $16\frac{1}{3}$ рубля; слѣдовательно онъ долженъ былъ получить $16\frac{1}{3}-8=8\frac{1}{3}=B$, погрѣшность будетъ $p-B=3-8\frac{1}{3}=-5\frac{1}{3}=C$; по сей причинѣ $x=\frac{Eb-aC}{E-C}=\frac{-4\frac{1}{2}\times 8+5\frac{1}{3}\times 10}{-4\frac{1}{2}+5\frac{1}{3}}=17\frac{1}{3}:\frac{5}{6}=20\frac{4}{5}$ $=20$ рубл. 80 коп. Изъ сего видно, что произведеніе изъ перваго положенія и второй погрѣшности безъ произведенія изъ втораго положенія на первую погрѣшность, раздѣленное на разность погрѣшностей, равно искомой цѣнѣ платья. И такъ рѣшеніе сего вопроса точно такоежъ, какое предлагается въ Ариѳметикѣ (§ 282), коему выведенное здѣсь буквами правило служитъ основаніемъ.

О логарифмахъ.

§ 179. *Опредѣленіе.* Ежели показатели прогрессіи Геометрической составляютъ прогрессію Ариѳметическую, какъ *на примѣръ*: $\div\!\div\, a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 :$ и проч - - - a^n (A), то показатели сей прогрессіи, какъ-то $\div\, 0, 1, 2, 3, 4, 5,$ и проч - - - n (B) называются логарифмами членовъ прогрессіи Геометрической, то есть члены прогрессіи B суть логарифмы соотвѣтствующихъ членовъ прогрессіи A.

Слѣдст. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, что число 3 есть логарифмъ количества a^3,

также n есть логарифмъ количества a^n, и о есть логарифмъ количества a°, которое $= 1$ (§ 27). Изъ чего заключить можно, что логарифмъ какого нибудь числа есть показатель степени, до которой возвышается ея корень a. Итакъ когда $a^n = b$, то логарифмъ количества a^n или b будетъ $= n$; *) по сей причинѣ $a^n = a^{Lb} = b$; поелику вмѣсто n можно поставить Lb.

Слѣдст. II. Изъ прогрессіи А и В легко усмотрѣть можно, первое, что логарифмъ произведенія двухъ какихъ нибудь количествъ равенъ суммѣ ихъ логарифмовъ, *на примѣръ*: логарифмъ произведенія изъ a^2 и a^3 будетъ $= a^5 = a^{2+3}$, то есть сумма логарифмовъ множимаго и множителя равна логарифму произведенія, какъ-то $La^5 = La^2 + La^3$. И вообще логарифмъ произведенія двухъ количествъ $a^n \times a^r = a^{n+r} = La^n + La^r$, то есть La^{n+r} есть $n + r$; или положимъ, что $a^n = c$ и $a^r = b$, то $Lc = n$ и $Lb = r$, но $a^n \times a^r = a^{n+r} = bc$, посему $Lbc = La^{n+r} = n + r$. Изъ сего явствуетъ, что вмѣсто умноженія двухъ чиселъ одного чрезъ другое, надлежитъ только сложить ихъ логарифмы, коихъ сумма покажетъ ихъ произведеніе.

Слѣдст. III. Изъ тогожъ видно, что логарифмъ частнаго равенъ разности логарифмовъ дѣлимаго и дѣлителя, *на примѣръ*: ежели a^5 раздѣлить чрезъ a^3, то логарифмъ 5 безъ лога-

*) Логарифмъ какого нибудь числа для краткости означается такимъ образомъ: $Lb = n$, и выговаривается Логарифмъ количества $b = n$.

гарифма $3 = 2$ будетъ логарифмъ частнаго; ибо $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$, то есть $La^5 - La^3 = La^2 = 5 - 3 = 2$: и вообще пусть будетъ дѣлимое количество $a^n = c$, дѣлитель $a^r = e$, то частное $\frac{a^n}{a^r} = a^{n-r} = \frac{c}{e}$: но $Lc = La^n = n$, $Le = a^r = r$, по сему $L\frac{a^n}{a^r} = L\frac{c}{e} = n - r$, то есть $Lc - Le = L\frac{c}{e}$.

Слѣдст. IV. Изъ тогожъ уразумѣть можно, что логарифмъ какой нибудь степени равенъ логарифму корня, умноженному на показателя, *на примѣръ*: $(aaa)^2 = a^{3\times 2} = a^6$, то есть $L(a^3)^2 = La^{3\times 2} = 3 \times 2 = 2.La^3$: и вообще положимъ, $a^3 = a^n = c$, то будетъ $(a^n)^2 = a^{n\times 2} = a^{2n} = c.c$, то есть $L(a^n)^2 = La^{2n} = Lc.c = 2n = 2.Lc$; также докажется, что и $Lc^3 = 3.Lc$; $Lc^4 = 4.Lc$; и вообще $Lc^n = n.Lc$; и обратно, логарифмъ какого нибудь корня равенъ логарифму степени, раздѣленному на кореннаго показателя, *на примѣръ*: $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$ то есть $L\sqrt{a^6} = La^{\frac{6}{2}} = \frac{6}{2} = 3 = \frac{1}{2}La^6$. И такъ естьли положимъ $n = \frac{1}{2}$, то будетъ $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, то есть $La^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{a} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}La^1$; естьлижъ $n = \frac{1}{3}$, то $La^{\frac{1}{3}} = L\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}La$; также $La^{\frac{1}{4}} = L\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}La$, и вообще $L\sqrt[n]{a} = La^{\frac{1}{n}} = \frac{La}{n}$.

Прибавлен. I. Ежели положимъ, $n = -1$, то будетъ $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$ (§ 53); посему La^{-1} =

$=L\frac{1}{a}=-1$. Когда $n=-2$, то будетъ $a^n=a^{-2}$ $=\frac{1}{a^2}$, слѣдовательно $La^{-2}=L\frac{1}{a^2}=-2$; также $L\frac{1}{a^3}=-3$ и прочая. Изъ сего явствуетъ, что логарифмы дробей суть числа отрицательныя, или невозможныя, относящіяся къ мнимымъ числамъ.

Прибавлен. II. Ежели въ предложенной § 179 го прогрессіи Геометрической положимъ $a=2$ или 3, 4, 5 и проч n, тогда тѣхъ же логарифмовъ произойдутъ различныя числа, какъ-то:

$2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4$ и проч.	то при всѣхъ сихъ разныхъ числахъ, логарифмы будутъ одинаки, какъ-то 0, 1, 2, 3, 4, 5 и прочая.
$3^0 : 3^1 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5$ - -	
$4^0 : 4^1 : 4^2 : 4^3 : 4^4 : 4^5$ - -	
$5^0 : 5^1 : 5^2 : 5^3 : 5^4 : 5^5$ - -	
. . . .	
$n^0 : n^1 : n^2 : n^3 : n^4 : n^5$	

Слѣдовательно сколько поставлено будетъ различныхъ прогрессій, столькожъ разныхъ системъ логарифмовъ сочинено быть можетъ. Во всякой системѣ постоянное число a зовется *основаніемъ логарифмическимъ*, которое никогда не можетъ быть равно единицѣ; поелику когда буква $a=1$, то всѣ ея степени a^2, a^3 и a^n будутъ $=1$ цѣ, и никакому другому данному числу равны быть не могутъ.

§ 180. *Положен.* Въ употребительныхъ таблицахъ логарифмовъ взято за основаніе, что корень $a=10$, отъ чего произошла десятернаго содержанія слѣдующая Геометрическая прогрессія

сія : $\div$ $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5$: и проч : 10^n, то есть прогрессія $\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : и проч. представляетЪ числа, коихЪ логарифмы суть 0, 1, 2, 3, 4, 5, и прочая.

Слѣдств. I. ИзЪ сего видно, что логарифмЪ 1 цы всегда будетЪ $=0$ (поелику $10^0=1$. § 27), $L10=1$, $L100=2$, $L1000=3$, $L10000=4$, $L100000=5$ и проч.; $L\frac{1}{10}=-1$, $L\frac{1}{100}=-2$, $L\frac{1}{1000}=-3$, $L\frac{1}{10000}=-4$ и прочая. И такЪ когда логарифмЪ 1 цы $=0$, $L10=1$, $L100=2$, $L1000=3$ и прочая: то логарифмы чиселЪ, между 1 цею и 10 заключающихся, должны быть больше 0, а меньше 1, то есть дроби; также логарифмы чиселЪ, между 10 и 100 находящихся, будутЪ больше, нежели 1 ца, но меньше 2 хЪ, то есть единица сЪ дробью; равнымЪ образомЪ логарифмы чиселЪ, между 100 и 1000 содержащихся, будутЪ больше 2 хЪ, а меньше 3 хЪ, то есть два сЪ десятичною дробью. Во всѣхЪ логарифмахЪ цѣлое число именуется *показатель логарифма*, а десятичная дробь зовется *прибавокъ* *).

Слѣдствіе II. ИзЪ сего уразумѣть можно, что показатель логарифма всегда единицею меньше, числа знаковЪ соотвѣтствующаго ему числа, то есть, когда число знаковЪ, изображающихЪ какую либо величину, будетЪ $=n$, то вЪ показателѣ логарифма число цѣлыхЪ единицЪ будетЪ $n-1$, *на примѣрЪ*: числа 27983 между 10000 и 100000 заключающагося, (которое состоитЪ изЪ 5 знаковЪ)

*) Употребительныя таблицы логарифмовЪ, на РоссійскомЪ языкѣ печатанныя, содержатЪ вЪ себѣ логарифмы всѣхЪ чиселЪ отЪ 1 до 10000; а на ФранцузскомЪ нѣкоторыя заключаютЪ вЪ себѣ логарифмы чиселЪ отЪ 1 до 20000, а иныя отЪ 1 до 100000, и называются таблицы Улаковы (*имя трудившагося вЪ сочиненіи оныхЪ*).

ковъ) соотвѣтствующїй показатель логарифма есть 4; и обратно когда показатель логарифма 8, то соотвѣтствующее ему число состоитъ изъ 9 знаковъ. Сего свойства никакая другая система имѣть не можетъ, по сей-то причинѣ и выбрано за основанїе $a=10$.

Слѣдствїе III. Изъ сего удобно можно видѣть, когда будешь имѣть такїя таблицы въ которыхъ для всѣхъ чиселъ вычислены логарифмы, то помощїю оныхъ легко самыя труднѣйшїя вычисленїя дѣлать можно, гдѣ только умноженїе или дѣленїе, также возвышенїе степеней и извлеченїе корней случаются; поелику въ помянутыхъ таблицахъ, какъ для каждаго числа логарифмъ, такъ и для всякаго логарифма самое число найти можно.

§ 181. *Задача. I.* Найти логарифмъ какого нибудь числа, и показать способъ, какъ находить логарифмы для всѣхъ обыкновенныхъ чиселъ.

Рѣшенїе. Положимъ, что требуется найти логарифмъ числа 9 ти, которой означимъ буквою x, то есть $L9=x$; но поелику извѣстно, что x будетъ больше 0, а меньше 1 цы, то есть требуемой логарифмъ долженъ быть такое число, чтобы 10^x точно было $=$ 9 ти; но какъ число 9 есть самое большое изъ чиселъ между, 1 ю и 10 заключающихся, то изъ сего легко уразумѣть можно, что логарифмъ онаго x долженъ быть такая дробь, которая не много меньше 1 цы; изъ сего видно, что x будетъ больше, нежели $\frac{4}{5}$, то есть $10^{\frac{4}{5}}$ меньше 9 ти; ибо возвыся оба сїи количества въ пятую степень, найдется пятая степень изъ $10^{\frac{4}{5}}=10^4=10000$, которая пятой степени отъ числа 9 ти равна быть должна; но пятая степень числа 9 ти $=$ 59049 больше 10000, по сему $10^{\frac{4}{5}}$ меньше

меньше, нежели 9; слѣдовательно $\frac{4}{5}$ меньше, нежели L9, то есть логарифмъ числа 9 долженъ быть больше, нежели $\frac{4}{5}$. Пусть такая дробь будетъ $\frac{9}{10}$: то должно быть $10^{\frac{9}{10}}=9$, то есть десятой степени какъ одной, такъ и другой величины, надлежитъ быть равнымъ между собою; но 10 я степень изъ $10^{\frac{9}{10}}=10^9=1000000000$, а десятая степень числа 9 ти $=3486784401$; изъ чего видно, что $\frac{9}{10}$ еще малы, то есть L9 больше, нежели $\frac{9}{10}$; также найдется, что L9 больше, нежели $\frac{19}{20}$, то есть $10^{\frac{19}{20}}<9$, однакожъ меньше, нежели $\frac{21}{22}$; изъ чего разумѣть можно, что показатель числа 10 ти есть такая дробь, для изслѣдованія которой между помянутыми дробями еще среднія Ариѳметическія искать надлежитъ, дабы степень сего показателя отъ числа 10 ти точно была $=9$ ти. Но дабы избѣгнуть помянутаго труда, то придавъ къ 1 цѣ и 10, также и къ логарифмамъ ихъ 0 и 1 по семи нулей, для десятичныхъ дробей, сыскивай между числами среднее Геометрическое соразмѣрное число (§ 160), а между логарифмами ихъ среднее Ариѳметическое (§ 139); потомъ между найденнымъ среднимъ Геометрическимъ и большимъ числомъ 10, сыщи среднее Геометрическое соразмѣрное число, а между логарифмами ихъ среднее Ариѳметическое, и такъ продолжая далѣе, надлежитъ вмѣщать между большимъ и меньшимъ ближайшимъ найденнымъ числомъ къ 9 ти новыя числа, и ко всякому найденному такимъ обра-

зомъ числу находить соотвѣтствующій логарифмъ до тѣхъ поръ, пока среднее Геометрическое число будетъ требуемое число 9 съ семью нулями, слѣдовательно и величина его логарифма найдена быть можетъ точно такимъ образомъ, какъ въ § 40 мъ III й части показано, и изъ приложеннаго здѣсь краткаго примѣра видѣть можно:

числа	логарифмы
$A = 1.0000000$	$0.0000000 = a$
$B = 10.0000000$	$1.0000000 = b$
средніа Геометрич.	средніа Ариѳметич.
$\sqrt{A.B} = D$ - - -	$\frac{a+b}{2} = d$
$\sqrt{B.D} = C$ - - -	$\frac{b+d}{2} = c$
$\sqrt{B.C} = E$ - - -	$\frac{b+c}{2} = e$
$\sqrt{B.E} = F$ - - -	$\frac{b+e}{2} = f$
$\sqrt{B.F} = G$ - - -	$\frac{b+f}{2} = g$
$\sqrt{G.F} = H$ - - -	$\frac{g+f}{2} = h$

и такъ продолжая далѣе до 26 го дѣйствія, наконецъ найдется $\sqrt{Y.Z} = 9.0000000$, а логарифмъ онаго $\frac{y+z}{2} = 0.9542425$.

По учиненіи сего положимъ, $L9 = x$. И такъ когда L9 намъ извѣстенъ, то логарифмъ числа 3 хъ, которое есть квадратной корень отъ 9, будетъ $= \frac{1}{2}x$ (§ 179 слѣдств. IV.); потомъ по извѣстному логарифму числа 3 хъ и логарифму единицы найдется логарифмъ числа 2 хъ

также,

также какъ и логарифмъ числа 9 ти. Теперь положимъ, что $L2=y$, а $L3=z$, то отъ сего легко найдутся логарифмы другихъ многихъ чиселъ; поелику когда $L2=y$, а $L10=1$, то будетъ $L6=L2+L3=y+z$; также $L20=1+y$, $L200=2+y$, $L2000=3+y$, $L20000=4+y$ и проч. равнымъ образомъ $L30=1+z$, $L300=2+z$, $L3000=3+z$ и прочая; а $L90=1+x$, $L900=2+x$, $L9000=3+x$ и прочая; также $L60=1+y+z$, $L600=2+y+z$, $L6000=3+y+z$ и такъ далѣе; ибо логарифмъ произведенія равенъ суммѣ логарифмовъ множимыхъ чиселъ.

Когда извѣстно, что $Lc^2=2.Lc$, $Lc^3=3.Lc$, $Lc^4=4.Lc$ и проч., то будетъ $L4=2y$, $L8=3y$, $L16=4y$, $L32=5y$, $L64=6y$ и проч. а изъ сихъ сыщется $L40=1+2y$, $L400=2+2y$, $L4000=3+2y$ и проч. $L80=1+3y$, $L800=2+3y$ и проч. $L160=1+4y$, $L1600=2+4y$, $L16000=3+4y$ и проч. также $L3\times3\times3=L27=3z$, $L81=4z$, $L243=5z$, $L729=6z$, откуда найдется $L270=1+3z$, $L2700=2+3z$, $L27000=3+3z$ и проч. $L810=1+4z$, $L8100=2+4z$, $L81000=3+4z$ и проч. $L2430=1+5z$, $L24300=2+5z$ и прочая.

Поелику найдено, что $L\frac{c}{e}=Lc-Le$, то положимъ, $c=10$, $e=2$; но когда $L10=1$, $L2=y$, то будетъ $L\frac{10}{2}=L5=1-y$; а изъ сего $L50=2-y$, $L500=3-y$, $L5000=4-y$ и проч.; потомъ $L25=2.(1-y)=2-2y$, $L125=3-3y$. $L625=4-4y$; а изъ сихъ сыщется $L250=3-2y$, $L2500=4-2y$, $L25000=5-2y$ и проч.

также $L1250=4-3y$, $L12500=5-3y$ и проч. еще же $L6250=5-4y$ и прочая.

Равнымъ образомъ, когда логарифмы чиселъ 2, 3, 4, 5 и 6 намъ извѣстны, то чрезъ оныя легко найти можно логарифмы и другихъ безконечно многихъ чиселъ, какъ-то: $L12=z+2y$, $L15=1+z-y$, $L18=y+2z$, $L24=z+3y$, $L48=z+4y$, $L96=z+5y$, $L192=z+6y$ и проч.; $L45=1+2z-y$, $L135=1+3z-y$, $L405=1+4z-y$ и проч. $L54=y+3z$, $L72=x+3y$, $L144=x+4y$ и проч. такожде $L120=1+z+2y$, $L1200=2+z+2y$ и проч. $L150=2+z-y$, $L1500=3+z-y$ и проч. $L180=1+y+2z$, $L1800=2+y+2z$ и проч. $L240=1+z+3y$, $L2400=2+z+3y$ и проч. $L480=1+z+4y$, $L4800=2+z+4y$ и прочая.

Наконецъ найдя логарифмы чиселъ 7, 11, 13, 17, и проч. также какъ и логарифмъ числа 9ти, можно чрезъ одно только сложенiе находить логарифмы многихъ другихъ чиселъ, какъ на примѣръ числа 210, состоящаго изъ слѣдующихъ множителей 2.3.5.7, будетъ логарифмъ $=L2+L3+L5+L7$; равнымъ образомъ, когда число $360=2.2.2.3.3.5=2^3.3^2.5$, то будетъ $L360=3.L2+2.L3+L5$. Изъ сего явствуетъ, какимъ образомъ изъ логарифмовъ такъ называемыхъ первыхъ чиселъ *) логарифмы всѣхъ другихъ безъ дальняго труда найти можно. И такъ при сочиненiи логарифмическихъ таблицъ,

---

*) Первымъ числомъ называется то, въ которомъ никакихъ множителей, кромѣ самаго себя, не заключается, какъ-то 7, 11, 23, 113 и прочая.

блицъ, о томъ только стараться должно, чтобы найдены были сколько можно совершеннѣе логарифмы первыхъ чиселъ, посредствомъ коихъ сочинены быть могутъ требуемыя таблицы.

Слѣдствiе. Изъ сего рѣшенiя и свойства логарифмовъ удобно разумѣть можно, что одинъ логарифмъ, перемѣняя только его показателя, многимъ числамъ служить можетъ, *на примѣръ*: положимъ логарифмъ числа $3786 = 3 + u$, то будетъ $L\frac{3786}{10} = L378.6' = 2 + u$, $L\frac{3786}{100} = L38.86'' = 1 + u$, $L\frac{3786}{1000} = L3.786''' = 0 + u$, $L0.3786^{IV} = -1 + u$, $L0.03786^{V} = -2 + u$, $L0.003786^{VI} = -3 + u$ и проч. и обратно $L37860 = 4 + u$, $L378600 = 5 + u$ и прочая.

§ 182. *Задача. II.* Данному логарифму 7.9281397, котораго показатель больше всякаго показателя, въ таблицахъ находящагося, найти соотвѣтствующее число.

Рѣшен. I. Прежде всего изъ показателя 7 вычти логарифмъ 10000, то есть 4; дабы оставшiйся логарифмъ былъ меньше самаго послѣдняго показателя, въ таблицахъ находящагося; потомъ къ остатку 3.9281397 прiищи въ таблицахъ соотвѣтствующее число, которое будетъ 8475; умножь найденное число чрезъ 10000, то произведенiе 84750000 будетъ искомое число, соотвѣтствующее данному логарифму 7.9281397.

II. Естьли данному логарифму, *на примѣръ*: 7.8281753 подлиннаго въ таблицахъ не находится, какъ-то въ первомъ рѣшенiи показано;

то для сысканія соотвѣтствующаго числа сему логарифму вычти 4 изъ показателя 7, найдется въ таблицахъ, что остатокъ логарифма 3.8281753 будетъ заключаться между логарифмами чиселъ 6732 и 6733, то есть больше логарифма числа 6732, а меньше L6733; изъ чего заключить можно, что къ числу 6732 принадлежитъ еще нѣкоторая дробь. И такъ для сысканія сей дроби вычти изъ логарифма большаго ближайшаго числа 6733, и изъ даннаго логарифма логарифмъ меньшаго ближайшаго числа 6732; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ разность логарифмовъ большаго и меньшаго ближайшаго чиселъ 645 содержится къ разности оныхъ чиселъ, то есть къ 1 цѣ, такъ разность меньшаго ближайшаго съ даннымъ 312 къ искомой дроби; то есть $645 : 1 = 312 : x = \frac{312}{645} = \frac{104}{215}$ *); найденную такимъ образомъ дробь припиши къ меньшему ближайшему числу 6732, то соотвѣтствующее число логарифму 3.8281753 будетъ $6732 + \frac{104}{215} = 6732\frac{104}{215}$: но какъ соотвѣтствующее число данному логарифму 7.8281753 должно быть въ 10000 разъ больше найденнаго, то для сего умножь $6732\frac{104}{215}$ чрезъ 10000, а логарифмъ онаго 4 придай къ логарифму 3.8281753, чрезъ что найдется данному логарифму соотвѣтствующее число 67324837.

Слѣ-

*) Хотя полагаемая здѣсь пропорція, что разности чиселъ суть соразмѣрны разности ихъ логарифмовъ, не есть истинная; но однакожъ оная въ большихъ числахъ за дѣйствительную безъ всякой погрѣшности принята быть можетъ.

Слѣдств. Ежели показатель даннаго логарифма не превозходитъ показателя, въ таблицахъ находящагося, тогда найденная показаннымъ образомъ дробь приводится въ десятичную (Часть I. § 144), и приписывается къ найденному меньшому ближайшему числу, которое вмѣстѣ съ десятичною дробью будетъ соотвѣтствовать данному логарифму.

Прибавлен. Ежели данной логарифмъ будетъ отрицательной, *на примѣръ*: -1.5327320, котораго соотвѣтствующее число должна быть дробь; то для сыскания оной, придай къ данному логарифму логарифмъ 100000, то есть 5, сумма будетъ 3.4672680; потомъ прiищи въ таблицахъ къ сему логарифму меньшее ближайшее число, которое будетъ 2932; но какъ сiе число во 100000 разъ больше должнаго, то раздѣли оное на 100000 частей, а логарифмъ его 5 вычти изъ логарифма 3.4672680, частное число $\frac{2932}{100000}=0.02932^{v}$ будетъ искомая дробь, даннаго логарифма -1.5327320.

§ 183. *Задача* III. Даннаго числа, которое больше 10000, найти соотвѣтствующiй логарифмъ.

Рѣшен. Положимъ, что требуется найти логарифмъ числа 3276492. Отдѣля въ данномъ числѣ отъ лѣвой руки къ правой четыре знака (или все тоже, раздѣля данное число на 1000 частей), прiищи въ таблицахъ соотвѣтствующiй логарифмъ отдѣленнаго числа 3276, которой будетъ 3.5153439; также и логарифмъ числа, единицею превозходящаго, то есть

3277, которой $=3.5154764$; придай къ показателямъ сихъ логарифмовъ столько единицъ, сколько въ данномъ числѣ отдѣлено съ правой руки знаковъ, отъ чего произойдутъ логарифмы 6.5153439 и 6.5154764, коихъ сотвѣтствующія числа суть 3276000 и 3277000, а разность оныхъ есть 1000; потомъ сдѣлай тройное правило: какъ разность сихъ чиселъ 1000 содержится къ разности ихъ логарифмовъ 1325, такъ разность даннаго и меньшаго ближайшаго числа 492 къ разности ихъ логарифмовъ, то есть $1000 : 1325 = 492 : x = 651$; найденное число 651 придай къ логарифму 6.5153439 меньшаго числа 3276000, будешь имѣть искомой логарифмъ числа 3276492 $=6.5154090$. Посредствомъ сего правила находится логарифмъ всякаго числа, въ таблицахъ превосходящаго.

§ 184. *Задача* IV. Къ тремъ даннымъ числамъ найти посредствомъ логарифмовъ четвертое пропорціональное число.

Рѣшен. Сложа логарифмы среднихъ членовъ, вычти логарифмъ перваго члена, остатокъ будетъ логарифмъ искомаго четвертаго пропорціональнаго члена, *на примѣръ*: положимъ, что должно найти четвертой соразмѣрной членъ слѣдующей пропорціи: $341 : 428 = 5797 : x$, то пріискавъ въ таблицахъ соотвѣтствующіе даннымъ числамъ логарифмы, сдѣлай, какъ слѣдуютъ:

$$L428 = 2.6314438$$
$$L5797 = 3.7632033$$

сумма $= 6.3946471$ L341

сумма $=6.3946471$
$L341=2.5327544$

$3.8618927=Lx=7276.$

Къ сему логарифму найдется въ таблицахъ соотвѣтствующее искомое число 7276. Справедливость сего видна изъ того, что для сысканія четвертаго соразмѣрнаго числа произведеніе среднихъ дѣлится на крайней извѣстной членъ.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, ежели извѣстны будутъ крайніе члены и одинъ средній; то изъ суммы логарифмовъ крайнихъ членовъ, вычтя логарифмъ даннаго средняго, найдется логарифмъ требуемаго втораго средняго; потомъ по извѣстному логарифму, посредствомъ предписанныхъ задачь, найдется соотвѣтствующее число.

§ 185. *Задача V.* Изъ предложеннаго числа, найти корень какой нибудь степени.

Рѣшен. Пріискавъ въ таблицѣ логарифмъ даннаго числа, раздѣли оной на кореннаго показателя, частное число будетъ логарифмъ искомаго корня, къ которому пріискавъ въ таблицахъ соотвѣтствующее число, будешь имѣть искомой корень, *на примѣръ*: положимъ, что требуется корень седьмой степени изъ числа 128, то найдется въ таблицѣ логарифмъ сего числа $=2.1072100$, которой раздѣля на 7, частное число 0.3010300 будетъ логарифмъ искомаго корня, косму соотвѣтствующее число въ таблицахъ есть 2.

Примѣчан. I. Ежели данное число не заключаетъ въ себѣ совершеннаго корня, какъ *на примѣръ* 7239, изъ котораго должно найти корень пятой степени; то раздѣля соотвѣтствующій въ таблицахъ логарифмъ сего

го числа 3.8596786 на пять частей, къ частному числу 0.7719357 прїищи меньшой ближайшей логарифмъ въ тѣхъ столбахъ таблицы, гдѣ показатель 3, найдется меньшой ближайшей логарифмъ 3.7718813 противъ числа 5914; но какъ число, соотвѣтствующее логарифму корня 0.7719357, должно состоять только изъ одного знака, того ради раздѣля 5914 на 1000, частное $5\frac{194}{1000} = 5.914'''$ будетъ требуемой корень.

Примѣчан. II. Чтожъ касается до сысканїя логарифмовъ простыхъ правильныхъ и смѣшанныхъ дробей, то смотри о семъ въ III части сего курса § 48 и послѣдующїе.

§ 186. *Опредѣлен.* *Дополненїе Ариѳметическое* есть разность между какимъ нибудь числомъ и единицею со столькими нулями, сколько предложенное число знаковъ въ себѣ заключаетъ.

Слѣдств. И такъ дополненїе Ариѳметическое числа 357 найдется, когда оное изъ 1000 вычтется. Изъ чего видно, что для сысканїя его дополненїя надлежитъ только вычесть первой знакъ отъ правой руки 7 изъ 10, а прочїе изъ 9ти, или все равно, что первой знакъ о принимается за 10, а каждой изъ прочихъ за 9, изключая единицу отъ лѣвой руки.

1000
357
643

Прибавлен. I. Посредствомъ сего правила можно дѣлать вычитанїе чрезъ сложенїе, *на примѣръ*: дабы изъ суммы двухъ чиселъ 352 и 523 вычесть сумму двухъ другихъ чиселъ 201 и 32, то написавъ два первыя числа, поставь подъ ними дополненїя Ариѳметическїя двухъ послѣднихъ чиселъ, отъ суммы ихъ 1742 отними

		523
		352
дополнен. Ариѳм. къ	201 - -	799
дополнен. Ариѳм. къ	32 - -	68
		1742
		642

единицу тысячь и единицу сотенъ, остатокъ 642 будетъ требуемая разность чиселъ.

Примѣчан. Ежели количество, изъ котораго данное число вычесть должно, будетъ имѣть больше знаковъ, нежели вы-

вычитаемое; то дабы Ариѳметическое дополненїе сего количества состояло изъ толикагожъ числа знаковъ, сколько первое имѣетъ, надлежитъ вычитаемое количество дополнить съ лѣвой руки нулями, и сыскавъ дополненїе онаго, сложить съ даннымъ числомъ; потомъ отъ суммы ихъ отнявъ единицу отъ перваго знака съ лѣвой руки, будешь имѣть искомую разность, *на примѣръ*: положимъ, что должно вычесть 69 изъ 5382, то Ариѳметическое дополненїе вычитаемаго количества 0069 будетъ 9931; потомъ сложа сїе число съ даннымъ 5382, отъ суммы ихъ 5382+9931=15313 отними единицу отъ перваго знака съ лѣвой руки, то и получишь требуемую разность 5313.

Прибавен. II. Для раздѣленїя числа 762 чрезъ 127 обыкновенно вычитается логарифмъ дѣлителя изъ логарифма дѣлимаго (§ 179 Слѣ. III), что самое учинить можно и посредствомъ помянутаго правила, прїискавъ въ таблицахъ логарифмъ дѣлимаго 762, сложи съ дополненїемъ Ариѳметическимъ 127; потомъ отъ произшедшей

2.8819550 = L762
7.8961963 дополн. Ариѳ. 127 *)
0.7781513

суммы изключи единицу съ лѣвой руки, то оставшееся количество 0.7781513 будетъ логарифмъ частнаго 6, которое отъ соотвѣтствующаго въ таблицахъ сему числу логарифма разнится только одною десяти-миллїонною частїю.

Прибавлен. III. Ежели должно будетъ умножить одну дробь другою дробью, то сложа вмѣстѣ логарифмы числителей съ Ариѳметическими дополненїями логарифмовъ знаменателей, наблюдая притомъ, чтобы дополненїя Ариѳметическїя знаменателей были изъ одного числа знаковъ съ логарифмами числителей (а въ противномъ случаѣ надлежитъ придать къ меньшему числу нѣсколько нулей съ лѣвой руки); потомъ въ найденной такимъ образомъ суммѣ уничтожь двѣ единицы съ лѣвой руки, остатокъ будетъ логарифмъ требуемаго произведенїя дробей.

*) Для сысканїя Ариѳметическаго дополненїя къ логарифму 2.1038037 числа 127, вычти 2.1038037 изъ 10.0000000, или все тоже и не отдѣля десятичныхъ дробей вычесть можно 21038037 изъ 100000000.

§ 187. Задача. VI. *Даннаго логарифма* 6.1389333 *найти сколько можно вѣрнѣйшее число.*

Рѣшен. Пріищи вЪ таблицахЪ кЪ дополненію сего логарифма 3.8610667 меньшой ближайшій логарифмЪ 3.8610562, которой найдется противЪ числа 7262; потомЪ сложи сей логарифмЪ сЪ даннымЪ, найдется вЪ таблицахЪ, что сумма сихЪ логарифмовЪ, не пріемля вЪ разсужденіе показателя, соотвѣтствуетЪ числу 9999, коего логарифмЪ есть 3.9999566; но какЪ показатель помянутаго логарифма есть 9, то поставя на мѣсто 3 хЪ показателя 9, меньшое ближайшее число логарифма 9.9999566 будетЪ 999900000, а большое ближайшее 1000000000, коего логарифмЪ есть 10.0000000; и такЪ вычтя какЪ изЪ сего, такЪ и изЪ логарифма 9.9999895 меньшой ближайшей логарифмЪ 9.9999566, сдѣлай слѣдующую пропорцію: какЪ разность логарифмовЪ большаго и меньшаго ближайшаго 434 кЪ разности суммою принятаго и меньшаго ближайшаго, такЪ разность чиселЪ 100000 кЪ соотвѣтствующему числу, то есть 434 : 329 = 100000 : 758064. Сіе число придай кЪ числу 999900000, то сумма 999975806 4 будетЪ соотвѣтствующее число логарифму 9.9999895; наконецЪ раздѣля найденное число 9999758064 на 7262, частное число $1376997\frac{5850}{7262}$ будетЪ искомое число даннаго логарифма.

3.8610562 = L7262
6.1389333
9.9999895 = суммѣ.

Прибавлен. Для сысканія вѣрнѣйшаго логарифма кЪ данному числу надлежитЪ оное довоДить до того, чтобы послѣдній знакЪ сЪ лѣвой руки былЪ 8 или 9, *на примѣрЪ*: ежели данное число будетЪ 1272641, то умножь оное на 7; потомЪ кЪ произведенію 8908487 сыщи соотвѣтствующій логарифмЪ, какЪ вЪ III задачѣ показано; наконецЪ кЪ найденному помянутымЪ образомЪ логарифму 6.9498039 придай Ариѳметическое дополненіе 9.1549020 логарифма числа 7 ми, и откинувЪ вЪ суммѣ ихЪ единицу отЪ послѣдняго знака сЪ лѣвой руки, остатокЪ 6.1047059 будетЪ вѣрнѣйшій логарифмЪ даннаго числа 1272641.

Задача VII. ИзвѣстенЪ первой членЪ Геометрической прогрессіи $\div\!\div a : ap : ap^2$ и проч. У ко-

которой первой членъ $a = 12$, показатель $p = 100$, найти пятнадцатой членъ.

Рѣшен. Положимъ искомой членъ x, (котораго логарифмъ означимъ чрезъ Lx), число членовъ $n = 15$, то будетъ $x = ap^{n-1}$ (§ 161), по сему будетъ $Lx = Lap^{n-1} = La + (n-1).Lp$; (ибо логарифмъ всякой степени равенъ произведенію изъ логарифма даннаго числа на показателя степени) $= L12 + 14.L100$; но какъ логарифмъ $100 = 2$, $L12 = 1.0791812$; по сей причинѣ логарифмъ количества x или $Lx = 1.0791812 + 28 = 29.0791812$, котораго соотвѣтствующее число 120000000000000000000000000000 будетъ искомой членъ прогрессіи.

Задача VIII. Служившему воину дано награжденіе за первую рану 1 коп. за другую 2 коп. за третью 4 коп. и такъ далѣе; по изчисленію нашлось, что воинъ получилъ всего награжденія 655 рубл. 35 коп. спраш. число его ранъ.

Рѣшен. Положимъ, число ранъ или число членовъ $= x$, сумма прогрессіи $\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 и проч. $= 65535 = b$, знаменатель $2 = p$, то послѣдній членъ будетъ $1.p^{x-1} = p^{x-1}$ (§ 161. слѣд. III.); но поелику первой членъ $= 1$, второй $= 2$, то отъ сего произойдетъ слѣдующая пропорція: $1 : 2 = b - p^{x-1} : b - 1$ (§ 163), при чемъ $b - 1 = (b - p^{x-1}).2$ или $\frac{b-1}{2} = b - p^{x-1}$, въ коемъ переставя члены, выйдетъ $p^{x-1} = b - (\frac{b-1}{2}) = \frac{b+1}{2}$, то есть $2^{x-1} = 32768$, по сему $(x-1).L2$

=

$= L32768$, или $x-1=\frac{L32768}{L2}$, а придавъ къ обѣимъ частямъ 1, будетъ $x=\frac{L32768}{L2}+1$ $=\frac{4.5154500}{0.3010300}+1=15+1=16=$ требуемому числу ранъ.

Задача IX. *Казначей похищалъ у своего господина изъ полныхъ бочекъ вино (изъ коихъ въ каждой было по 100 бутылокъ), дополняя ихъ водою, такимъ образомъ: взявши первую бутылку вина, дополнилъ водою; потомъ послѣ взятья изъ такого вина второй бутылки, опять дополнилъ бутылкою воды, и такъ далѣе, пока оставалось въ бочкѣ 50 бутылокъ вина, смѣшаннаго съ 50 бутылками воды; спраш. сколько сей хищникъ изъ каждой бочки такимъ образомъ бутылокъ взялъ.*

Рѣшен. Положимъ, $a=100$ бутыл. $b=1$ бутыл. $d=50$ бутыл. и x требуемое число разъ взятыхъ бутылокъ. Послѣ взятья первой бутылки, то есть мѣры b, останется въ бочкѣ для втораго раза настоящаго вина только 99 бутылокъ $=a-b$, котораго въ мѣрѣ b во второй разъ будетъ $99\times\frac{1}{100}$ *) $=(a-b)\frac{b}{a}=\frac{b(a-b)}{a}$; и такъ послѣ втораго взятья бутылки останется въ бочкѣ цѣльнаго вина $a-b-\frac{b(a-b)}{a}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a}=\frac{(a-b)^2}{a}$; въ третьей взятой бутылкѣ b будетъ вина $\frac{b}{a}\times\frac{(a-b)^2}{a}$ $=\frac{b(a-b)^2}{a^2}$, послѣ чего останется въ бочкѣ цѣльнаго вина только $\frac{(a-b)^2}{a}-\frac{b(a-b)^2}{a^2}=\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2}=\frac{(a-b)^3}{a^2}$ и вообще послѣ взятья x бутылокъ, останется въ бочкѣ

*) Смотри Часть I § 105.

чкѣ количество вина $\frac{(a-b)^x}{a^{x-1}}=d$ (по разположенію). Но какъ количество x есть неизвѣстной показатель, то для сысканія онаго надлежитъ употребить логарифмы. И такъ будетъ $L\frac{(a+b)^x}{a^{x-1}}=Ld$; но логарифмъ частнаго равенъ разности логарифмовъ дѣлимаго и дѣлителя, а логарифмъ всякой степени равенъ логарифму корня, умноженному показателемъ степени; по сей причинѣ $L(a-b)^x-La^{x-1}=Ld$ или $x.L(a-b)-(x-1).La=Ld$ $=x.L(a-b)-x.La+La=Ld$, въ коемъ переставя члены, будетъ $La-Ld=x.La-x.L(a-b)=x\,[La-L(a-b)]$; откуда найдется $\frac{La-Ld}{La-L(a-b)}=x=\frac{L100-L50}{L100-L99}$, то есть $\frac{2.0000000-1.6989700}{2.0000000-1.9956325}=\frac{0.3010300}{0.0043675}=$ почти 69 бутылокъ, то есть изъ каждой бочки взято помянутымъ образомъ около 69 бутылокъ, изъ коихъ въ каждой осталось настоящаго вина 50 бутылокъ и 50 бутылокъ воды.

Задача X. Нѣкто отдалъ 1500 рублей въ долгъ на 15 лѣтъ съ процентомъ по 7 рублей на 100 въ годъ, считая и на проценты процентъ; спрашивается, какъ великъ будетъ капиталъ чрезъ показанное время.

Рѣшен. Положимъ $1500=b$, $100=a$, $7=d$, $15=n$, а искомой капиталъ $=x$; то капиталъ послѣ перваго года найдется такъ: $100:107$ $=1500:\frac{1500\times107}{100}$, или $a:a+d=b:b\times\frac{a+d}{a}$; а послѣ втораго года капиталъ найдется такимъ образомъ: $a:a+d=b.(\frac{a+d}{a}):b.(\frac{a+d}{a}).(\frac{a+d}{a})$ $=b.(\frac{a+d}{a})^2$, и такъ далѣе въ концѣ 15 го года капиталъ будетъ $b.(\frac{a+d}{a})^{15}=x$; по сему

$Lb(\frac{a+d}{a})^{15} = Lx = Lb + 15 . L(\frac{a+d}{a})$ то есть $Lx = L1500 + 15 . L\frac{107}{100} = L1500 + 15 . (L107 - L100) = 3.1760913 + 15 \times 0.0293838 = 3.6168483$; которому соотвѣтствующее число найдется 4138 рубл. 55 копѣекъ.

Задача XI. Нѣкто отдалъ 1000 рублей съ процентомъ по 4 рубли на 100 въ годъ, считая и на проценты процентъ; послѣ нѣскольких лѣтъ заимодавецъ получилъ съ подлежащими процентами 1800 рублей; спрашивается сколько лѣтъ помянутой капиталъ былъ въ долгу.

Рѣшен. Положимъ, заемная сумма 1000 рубл. $= a$, $1800 = d$, простой годовой процентъ со ста рублей, коимъ увеличивается сумма чрезъ каждой годъ, то есть $\frac{4}{100} = \frac{1}{25} = r$, искомое время $= x$, слѣдственно годовой интересъ съ полной суммы будетъ $1000 \times \frac{1}{25} = ra$, а сумма капитала съ интересомъ чрезъ годъ будетъ $a + ra = a(1 + r)$. И такъ въ разсужденіи одинакаго содержанія долговая сумма чрезъ 2 года будетъ $a.(1+r).(1+r) = a.(1+r)^2$; чрезъ три года выйдетъ $a.(1+r)^3$, и вообще чрезъ искомое число лѣтъ x долговая сумма будетъ $a.(1+r)^x = d$. Для разрѣшенія сего, означимъ мы сіи количества ихъ логарифмами, то есть будетъ $La(1+r)^x = Ld$; (ибо когда количества равны, то и логарифмы ихъ равны между собою); но поелику логарифмъ произведенія равенъ суммѣ логарифмовъ множимаго и множителя, а логарифмъ всякой степени равенъ произведенію изъ логарифма корня чрезъ по-

показателя степени; по сей причинѣ $La(1+r)^x = Ld = La + x.L(1+r)$, а перенеся величины изъ одной части въ другую, будетъ $Ld - La = x.L(1+r)$, и наконецъ найдется $x = \frac{Ld - La}{L(1+r)} = \frac{L1800 - L1000}{L26 - L25} = \frac{3.2552725 - 3.0000000}{1.4149733 - 1.3979400} = \frac{0.2552725}{0.0170333}$. И такъ раздѣля 0.2552725 на 0.0170333, найдется, что оной капиталъ увеличился чрезъ 14 лѣтъ 11 мѣсяцовъ $25\frac{1}{4}$ дней,

Задача XII. *Въ одномъ городѣ изчислено простаго народа 10000 человѣкъ, отъ котораго ежегодное приращенїе было постоянно; а послѣ 15 ти лѣтъ нашлось онаго 20000 человѣкъ; спрашивается, какая частъ отъ наличнаго числа людей ежегодно раждалась.*

Рѣшен. Положимъ, $10000 = a$, $20000 = b$, $15 = n$, а наличное число людей съ родившимися послѣ перваго года x. И такъ ежели сдѣлаешь сїю пропорцїю: $a : x = x : \frac{x^2}{a}$, то найденное число $\frac{x^2}{a}$ покажетъ число людей съ родившимися послѣ двухъ лѣтъ; потомъ сдѣлай тройное правило $a : x = \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2}$, то четвертой членъ $\frac{x^3}{a^2}$ покажетъ число наличныхъ людей послѣ трехъ лѣтъ; по сему чрезъ n, или чрезъ 15 лѣтъ число людей съ родившимися будетъ $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$; откуда найдется $x^n = b.a^{n-1}$, въ коемъ $n.Lx = (n-1).La + Lb$, или $15.Lx = 14.La + Lb$, а по раздѣленїи на 15, выйдетъ $Lx = \frac{14.La + Lb}{15}$. Но $La = 4$, $Lb = 4.3010300$; по сей причинѣ $Lx = \frac{60.3010300}{15} = 4.0200686$, котораго соотвѣтствующее

число есть 10472; вычти изъ сего числа 10000, остатокъ 472 будетъ число родившихся въ первой годъ, которое есть $\frac{472}{10000}=\frac{59}{1250}$ или почти $\frac{1}{21}$ часть бывшихъ тогда наличныхъ людей. Изъ сего видно, что число раждаемыхъ было меньше, нежели $\frac{1}{21}$ часть отъ наличнаго числа людей.

Прибавлен. Ежели число жителей въ городѣ всякой годъ увеличиваться будетъ тридцатою частїю, то найдется, какъ велико число жителей будетъ послѣ цѣлаго вѣка; ибо послѣ перваго года, какъ-то изъ положенїя видѣть можно, будетъ $a+\frac{a}{30}=a.(1+\frac{1}{30})$ $=a.\frac{31}{30}$; но ежели сдѣлать еще сїю пропорцїю: $a:a(\frac{31}{30})$ $=a(\frac{31}{30}):a(\frac{31}{30})^2$, то четвертой членъ, покажетъ число жителей послѣ втораго года; и вообще послѣ n лѣтъ число жителей будетъ $a(\frac{31}{30})^n$. Но какъ здѣсь $n=100$, то будетъ $a(\frac{31}{30})^{100}=x=$ требуемому числу людей; въ которомъ $La+100.L\frac{31}{30}=Lx$: но $L\frac{31}{30}=L31-L30$ $=0.0142405$ (какъ-то изъ логарифмическихъ таблицъ усмотрѣть можно). И такъ ежели положимъ, $a=100000$, то найдется $Lx=6.4240500$, которому соотвѣтствующее число $=2654911=x$, такое число жителей будетъ послѣ 100 лѣтъ, когда сначала вѣка будетъ 100000 человѣкъ.

Задача XIII. *Въ первой годъ послѣ всемїрнаго потопа земля населена была только 6 ю человѣками, то есть тремя* Ноевыми *сыновьями съ ихъ женами, отъ коихъ размножился родъ человѣческїй такъ, что чрезъ 200 лѣтъ послѣ потопа изчислено одинъ миллїонъ рода человѣческаго; спрашивается, какая часть наличнаго числа людей ежегодно раждалось.*

Рѣшен. Положимъ, искомая часть $=x$, то послѣ перваго года число людей будетъ (изключая *Ноя*) =

$= 6 + \frac{6}{x} = 6.(1 + \frac{1}{x}) = 6.(\frac{x+1}{x})$; послѣ втораго года $6.(\frac{x+1}{2})^2$, а чрезъ 200 лѣтъ найдется $6.(\frac{x+1}{x})^{200} = 1000000$; раздѣли каждую часть на 6, выйдетъ $(\frac{x+1}{x})^{200} = \frac{1000000}{6}$, а по извлеченіи корней будетъ $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = \sqrt[200]{(\frac{1000000}{6})} = (\frac{1000000}{6})^{\frac{1}{200}}$. Изъ сего удобно разумѣть можно, что $L(\frac{x+1}{x}) = \frac{1}{200} \times L(\frac{1000000}{6}) = \frac{1}{200}.(L1000000 - L6) = \frac{1}{200}.(5.2218488) = 0.0261092 = L(\frac{x+1}{x}) = L(1 + \frac{1}{x})$; соотвѣтствующее число сего логарифма есть $\frac{1061962}{1000000} = 1 + \frac{61962}{1000000} = 1 + \frac{1}{x}$; а отнявъ отъ обѣихъ частей 1, будетъ $\frac{61962}{1000000} = \frac{1}{x}$; естьлижъ изключены будутъ знаменатели, то выйдетъ $61962x = 1000000$, откуда найдется $x = \frac{1000000}{61962} =$ почти 16. И такъ человѣческій родъ умножался ежегодно почти $\frac{1}{16}$ ю частію наличнаго числа людей.

О рѣшеніи непостоянныхъ и неопредѣленныхъ вопросовъ.

§ 188. *Определен.* *Постоянные* или *определенные* вопросы суть тѣ, кои имѣютъ всегда одно только условное рѣшеніе, каковы суть тѣ, кои до сего отдѣленія предложены были. *Полуопредѣленные* или *непостоянные* вопросы суть тѣ, изъ коихъ изобрѣтается нѣсколько рѣшеній, одни и тѣжъ условія вопроса означающихъ. *Неопредѣленные* суть

тѣ, изъ коихъ выводится безконечное число рѣшеній, одно и тоже свойство вопроса означающихъ *).

§ 189. *Прибавлен.* Дабы имѣть о предписанномъ ясное понятіе, то положимъ, *на примѣръ*, требуется найти два числа x и y, коихъ бы сумма была $= 10$; отъ сего произойдетъ уравненіе $x+y=10$, или $x=10-y$. Для разрѣшенія сего вопроса положимъ $y=9$, то будетъ $x=10-9=1$. Естьли же положимъ $y=8$, то выйдетъ $x=2$. и проч. И такъ въ семъ вопросѣ произойти можетъ безконечное число рѣшеній; поелику въ семъ случаѣ можно принять одно число положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробью; слѣдовательно въ разсужденіи сего произойдетъ безконечное число положеній, и потому безконечное число рѣшеній быть можетъ. Сего-то рода вопросы именуются неопредѣленными, и составляютъ такъ называемую *неопредѣленную аналитику*.

Но естьли къ помянутому вопросу присовокупится и сіе условіе, чтобы искомыя числа были цѣлыя и притомъ положительныя; то число всѣхъ возможныхъ рѣшеній въ нѣкоторыхъ случаяхъ ограничено быть можетъ, *на примѣръ*: положимъ, что искомыя числа означен-

---

*) Сія часть Алгебры имѣетъ совсѣмъ отмѣнныя противъ прежнихъ рѣшенія вопросовъ, и для того требуетъ особливыхъ правилъ, посредствомъ коихъ удобно изощряется разумъ учащихся, и большая придается имъ прозорливость въ рѣшеніи важнѣйшихъ Алгебраическихъ предложеній.

ченнаго примѣра x и y должны быть цѣлыя и притомъ положительныя, то отъ сего выйдетъ только девять возможныхъ рѣшенiй, то есть по положенiю будетъ $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, откуда найдется $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но какъ первыя четыре рѣшенiя съ послѣдними суть одинаковы, то для сего вопросъ рѣшится только 5 ю образами. Сему-то подобные вопросы называются непостоянными или полуопредѣленными.

Задача I. Найти два числа x и y такiя, чтобы первое, трижды взятое, со вторымъ удвоеннымъ составляли число 20.

Рѣшен. По свойству вопроса будетъ $3x+2y=20$, откуда найдется $x=\frac{20-2y}{3}$; но какъ x долженъ быть цѣлое положительное число, то изъ сего видно, что 20 больше $2y$ и 10 больше y, слѣдственно y долженъ быть меньше 10 и не больше 7 ми *), которое также должно быть цѣлое положительное; и такъ по исключенiи изъ онаго уравненiя, сколько можно цѣлыхъ чиселъ, будетъ $x=6+\frac{2-2y}{3}=6+2.(\frac{1-y}{3})$; но поелику дробь $\frac{1-y}{3}$ должна быть цѣлое число, по сему $1-y$ или $y-1$ на 3 безъ остатка дѣлиться должно. Теперь положимъ $\frac{y-1}{3}=z$, или $y-1=3z$, то выйдетъ $y=3z+1$; по сей причинѣ $x=6-2z$; но по-

*) Поелику 20 безъ $2y$ на 3 безъ остатка раздѣлиться должно.

елику y не болѣе 7 ми быть долженъ, то вмѣсто z никакихъ другихъ чиселъ взять не можно, какъ только тѣ, кои $3z+1$ составляютъ не больше 7 ми, слѣдовательно z меньше 3 хъ быть долженъ. И такъ когда положимъ $z=0, 1, 2$, то найдется $y=1, 4, 7$, и $x=6, 4, 2$. Изъ сего видно, что два искомыя числа произведутъ слѣдующее: I) $18+2$, II) $12+8$, III) $6+14$, изъ коихъ каждое $=20$: слѣдовательно въ семъ вопросѣ произошло только три рѣшенія.

Задача II. Найти три числа, коихъ бы сумма была $=21$, а разность между первымъ и вторымъ равна разности втораго съ третьимъ.

Рѣшен. Пусть будутъ искомыя числа x, y и z, то будетъ $x+y+z=21$, $x-y=y-z$, изъ коего найдется $x=2y-z$; и такъ поставя $2y-z$ въ первомъ уравненіи на мѣсто x, выйдетъ $2y-z+y+z=21$, или $3y=21$, откуда найдется $y=7$. И такъ когда $x+z+7=21$, то будетъ $z+x=14$, или $x=14-z$. Теперь положи $z=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$, то будетъ $x=13. 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но какъ послѣднія шесть рѣшеній одинаковы съ первыми, то всѣхъ рѣшеній только 7, или вопросъ рѣшится 7 ю образами.

Задача III. Число 100 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна дѣлилась на 7, а другая на 11.

Рѣшен. Положимъ, первая часть $=7x$, вторая $=11y$, то будетъ $7x+11y=100$, откуда

куда найдется $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}$, а по исключеніи цѣлыхъ чиселъ, выйдетъ $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; по сему $2-4y$ или $4y-2$ на 7 раздѣлиться должно, а когда $4y-2$ на 7 раздѣлиться можетъ, то и половина онаго $2y-1$, также на 7 раздѣлиться должна; и такъ пусть будетъ $\frac{2y-1}{7}=z$, или $2y-1=7z$, откуда найдется $y=\frac{7z+1}{2}=3z+\frac{z+1}{2}$ Положимъ что $\frac{z+1}{2}=r$, то найдется $z=2r-1$, $y=6r-3+r=7r-3$, $x=14-7r+3+2-4r=19-11r$. И такъ когда вмѣсто r цѣлое положительное число взять можно, то найдется по первому уравненію, что $7r$ должно быть больше 3 хъ, или r больше $\frac{3}{7}$, а по второму $11r$ меньше 19, или r меньше $\frac{19}{11}$; ибо когда $\frac{3}{7}=r$, то будетъ $3=7r$, и въ разсужденіи сего вышло бы, что $y=7r-3=3-3=0$; по сему r больше нуля, и меньше 2 быть должно, слѣдовательно остается одна только его величина $r=1$, откуда найдется $x=8$, и $y=4$, посредствомъ чего найдутся требуемыя части, первая $7x=56$, вторая $11y=44$.

Задача IV. Нѣсколько человѣкъ мущинъ и женщинъ заплатили за содержаніе ихъ 100 рублей, каждая изъ послѣднихъ заплатила 5 рублей и сверьхъ всей суммы 2 рубли, а каждой изъ молодцовъ по 7 ми рублей съ прибавкою на ту сумму 4 хъ рублей; спрашивается число мущинъ и женщинъ.

Рѣшен. Положимъ число женщинъ x, молодцовъ y, по сему женщины заплатили $5x+2$ рубл., а мущины $7y+4$. И такъ $5x+2+7y+4=100$, или $5x+7y=94$, откуда выйдетъ $5x=94-7y$, или $x=\frac{94-7y}{5}=18-y+\frac{4-2y}{5}$. Теперь положимъ, $\frac{4-2y}{5}=q$, или $\frac{y-2}{5}=q$, то найдется $y=5q+2$, $x=18-5q-2+\frac{4-10q-4}{5}=18-2-5q-2q=16-7q$. Изъ сего видно, что $7q$ меньше 16 ти, или меньше $\frac{16}{7}$, слѣдовательно больше 2хъ быть не можетъ. И такъ положимъ $q=0, 1, 2$, то найдется $x=16, 9, 2$ число женщинъ, $y=2, 7, 12$ число мущинъ; слѣдовательно сей вопросъ рѣшится только тремя образами, то есть женщинъ было 16 либо 9 или 2, а мущинъ 2, 7 или 12.

Задача V. Два гранодера имѣютъ вмѣстѣ 100 патроновъ; первой говоритъ другому: ежели я свои по 8 считать буду, то у меня останется 7; а другой сказалъ: когда я свои по 10 считать начну, то и у меня въ остаткѣ также будетъ 7; спрашивается сколько каждой патроновъ имѣетъ.

Рѣшен. Поелику когда число перваго раздѣлится на 8, то въ остаткѣ будетъ 7, а отъ раздѣленія числа другаго на 10 останется также 7; по сей причинѣ положимъ число зарядовъ перваго $=8x+7$, а втораго $=10y+7$, то будетъ $8x+10y+14=100$, или $8x=86-10y$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $4x=43-5y$, въ которомъ найдется $x=\frac{43-5y}{4}=10-y$

$+\frac{3-y}{4}$. Изъ сего видно, что $3-y$ или $y-3$ на 4 дѣлиться должны; и такъ положимъ $\frac{y-3}{4}=z$, то будетъ $y-3=4z$, или $y=4z+3$; откуда найдется $x=10-3-4z-z=7-5z$, по сему $5z$ меньше 7 ми быть должно, или z меньше $\frac{7}{5}$, по сему z меньше 2 хъ. И такъ положимъ $z=0, 1$, то найдется $x=7, 2$; $y=3, 7$, слѣдовательно въ семъ вопросѣ вышло два рѣшенія, изъ коихъ по первому рѣшенію у перваго было $7\times8+7=63$, а по второму $2\times8+7=23$; а у втораго по первому рѣшенію $3\times10+7=37$, по второму $7\times10+7=77$.

Задача. VI. Въ нѣкоторомъ собраніи мущины и женщины издержали вмѣстѣ 1000 коп.; каждой мущина заплатилъ 19 коп., а каждая женщина 13 коп.; спрашивается, сколько было мущинъ и сколько женщинъ.

Рѣшен. Пусть будетъ число мущинъ x, а женщинъ y, то произойдетъ уравненіе $19x+13y=1000$, изъ сего найдется $13y=1000-19x$, или $y=\frac{1000-19x}{13}=76-x+\frac{12-6x}{13}$; по сему $12-6x$ или $6x-12$, также и шестая часть онаго, то есть $x-2$ на 13 дѣлиться должно; и такъ положимъ $\frac{x-2}{13}=z$, откуда найдется $x=13z+2$, а $y=76-13z-2-6z=74-19z$. Изъ сего видно, что z долженъ быть меньше $\frac{74}{19}$ или меньше 4 хъ; по сей причинѣ предложенной вопросъ заключаетъ въ себѣ 4 слѣдующія рѣшенія: I) когда положимъ $z=0$, то выйдетъ

$x=2$, $y=74$, то есть 2е мущинЪ и 74 женщины; первые заплатили 38 коп. а послѣднія 962 коп.; II) когда $z=1$, то $x=15$, а $y=55$, первые издержали 285 коп. а послѣднія 715 коп.; III) ежели $z=2$, то $x=28$, а $y=36$, первые заплатили 532 коп. а другія 468 коп.; IV) будежЪ положимЪ $z=3$, то найдется $x=41$, а $y=17$; мущины заплатили 779 коп. а женщины 221 коп.

Задача. VII. ВЪ кавалерійской полкЪ куплено на 1770 рублей строевыхЪ и подъемныхЪ лошадей; за строевую лошадь плачено по 31 рублю, а за каждую подъемную по 21 рублю; спрашивается сколько куплено строевыхЪ и сколько подъемныхЪ лошадей.

Рѣшен. ПоложимЪ, число строевыхЪ лошадей x, подъемныхЪ $=y$, то будетЪ $31x+21y=1770$ рубл. или $21y=1770-31x$, откуда найдется $y=\frac{1770-31x}{21}=84-x+\frac{6-10x}{21}$; по сему $10x-6$, также и половина онаго $5x-3$ раздѣлится на 21; и такЪ положимЪ $\frac{5x-3}{21}=z$, или $5x-3=21z$, будетЪ $x=\frac{21z+3}{5}=4z+\frac{z+3}{5}$, $=4z+u$ *), гдѣ $\frac{z+3}{5}=u$ или $z+3=5u$; откуда найдется $z=5u-3$, $x=4(5u-3)+u=21u-12$, $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$. ИзЪ

*) Дабы не всегда повторять одинакія слова положенія, то какЪ вЪ семЪ рѣшеніи, такЪ и вЪ послѣдующихЪ, будетЪ ставиться вмѣсто дроби произвольная буква, не упоминая ничего.

Изъ сего видно, что u больше 0, а меньше 4 хъ; по сей причинѣ выйдутъ три слѣдующія рѣшенія: I) положа $u=1$, будетъ число строевыхъ лошадей $x=9$, а подъемныхъ $y=71$, за первыхъ заплачено 279 рубл. а за подъемныхъ 1491 рубль. II) когда $u=2$, то будетъ $x=30$, $y=40$. III) естьли $u=3$, то будетъ $x=51$, а $y=9$.

Задача. **VIII.** Нѣкто долженъ 1200 рублей, и желаетъ сей долгъ платить сукномъ и бархатомъ; послѣдняго изъ сихъ, аршинъ по 7 ми рубл. а перваго по 5 рублей; спрашив. сколько аршинъ каждаго отдать должно.

Рѣшен. Положимъ число аршинъ бархату x, сукна y, то будетъ $7x+5y=1200$, $x=\frac{1200-5y}{7}$ $=171+\frac{3-5y}{7}$; пусть $\frac{3-5y}{7}$ или $\frac{5y-3}{7}=z$, будетъ $5y-3=7z$, или $y=\frac{7z+3}{5}=z$ $+\frac{2z+3}{5}=z+r$, гдѣ $r=\frac{2z+3}{5}$; откуда найдется $2z+3=5r$, или $z=\frac{5r-3}{2}=2r+\frac{r-3}{2}=2r+t$; по сему $t=\frac{r-3}{2}$, или $2t=r-3$, гдѣ $r=2t+3$; изъ сего найдется $z=4t+6+t=5t+6$, $y=7t$ $+9$, $x=171-5t-6=165-5t$. Изъ сего видно, что $\frac{165}{5}=33$, слѣдовательно t меньше 33 быть должно, то есть не больше 32. И такъ положивъ $t=0, 1, 2, 3, 4$ и проч. 32, выйдутъ слѣдующія Ариѳметическія прогрессіи: $y=9, 16, 23, 30$ и проч. 233; $x=165, 160, 155, 150$ и проч. 5; изъ коихъ у первой разность 7, а

у второй 5; слѣдственно сей вопросъ имѣетъ 33 рѣшенія.

Примѣчан. Предложенные до сихъ поръ вопросы основаніе свое имѣютъ на слѣдующемъ уравненіи: $ax+by=c$, гдѣ буквы a и b означаютъ цѣлыя и положительныя числа, и количество c никогда нулемъ быть не можетъ.

Задача. IX. Найти два числа x и y такія, чтобы $33x$ равны были $76+59y$.

Рѣшен. Когда $33x=76+59y$, то будетъ $x=\frac{76+59y}{33}=2+y+\frac{2(5+13y)}{33}$. Пусть будетъ $\frac{5+13y}{33}=p$, то выйдетъ $5+13y=33p$, откуда найдется $y=\frac{33p-5}{13}=2p+\frac{7p-5}{13}=2p+r$, гдѣ $\frac{7p-5}{13}=r$ или $7p-5=13r$, въ коемъ выйдетъ $p=\frac{13r+5}{7}=r+\frac{6r+5}{7}=r+q$; и такъ когда $\frac{6r+5}{7}=q$, то будетъ $r=\frac{7q-5}{6}=q+\frac{q-5}{6}=q+t$; по сему $\frac{q-5}{6}=t$, изъ котораго выйдетъ $q=6t+5$, откуда найдется $r=7t+5$, $p=13t+10$, $y=33t+25$, $x=59t+47$. Но какъ въ семъ уравненіи t должно быть цѣлое и положительное число *); то положа $t=1$, найдется самое меньшое число $x=106$, $y=58$. Отсюда произойдетъ безконечное число рѣшеній: ибо положа $t=2$, найдется $x=165$, $y=91$, и такъ далѣе произойдутъ Ариѳметическія прогрессіи безконечнаго числа членовъ, изъ коихъ у первой разность 59, а у второй 33.

При-

---

*) Ибо ежели положимъ $t=-1$, то выйдетъ $x=59t+47=-59+47=-12$ число невозможное.

Примѣчан. Положимъ, въ помянутомъ уравненіи $\frac{5+13y}{33}$ предложеннаго вопроса будетъ $5=a$, $13=d$, $33=c$, то будетъ первая дробь, представляющая величину, $p=\frac{a+dy}{c}$, и уравненіе $cp=dy+a$ можетъ быть изображено такимъ образомъ: $pc-dy=a$, въ которомъ количество d есть отрицательное; по сей причинѣ во всѣхъ такого роду вопросахъ, какъ и въ предъидущемъ, будетъ безконечное число рѣшеній. Естьли же количество a будетъ $=0$, и pc одному только dy равно: то и въ семъ случаѣ выйдетъ такоежъ число рѣшеній. Но ежели при разрѣшеніи дроби $\frac{a+dy}{c}=p$ оба количества a и c будутъ числа не первыя, то есть каждое изъ нихъ кромѣ единицы еще заключаетъ въ себѣ какихъ нибудь множителей: то въ семъ случаѣ надлежитъ примѣчать, что такой вопросъ будетъ невозможной; поелику положимъ на прим. $c=9$, $d=15$, $a=2$, то будетъ $p=\frac{2+15y}{9}=y+\frac{6y+2}{9}=y+q$, гдѣ $q=\frac{6y+2}{9}$, или $6y+2=9q$; по сему $y=\frac{9q-2}{6}=q+\frac{3q-2}{6}=q+r$, въ коемъ $\frac{3q-2}{6}=r$, или $3q-2=6r$, гдѣ $q=\frac{6r+2}{3}=2r+\frac{2}{3}$. Откуда явствуетъ, что количество q никогда цѣлымъ числомъ быть не можетъ; ибо r непремѣнно цѣлое число быть должно, слѣдовательно такіе вопросы по ихъ свойствамъ суть не возможны.

Задача. X. Найти число, которое бы на 2 и на 3 дѣлиться могло.

Рѣшен. Пусть будетъ искомое число $=N$, положимъ $N=2x$ и $N=3y$; по сему будетъ $2x=3y$ или $x=y+\frac{y}{2}$; теперь положи $\frac{y}{2}=z$, откуда найдется $y=2z$, $x=3z$, $N=6z$. И такъ естьли $z=1, 2, 3, 4$ и прочая, то выйдетъ $N=6, 12, 18, 24, 30$ и такъ далѣе. Изъ сего ви-

видно, что въ семъ случаѣ выйдетъ безконечное число рѣшеній, такъ что самое меньшое число $=6$, а далѣе слѣдующія числа составляютъ безконечно возрастающую Ариѳметическую прогрессію, у которой разность $=6$.

Задача. XI. Поваръ купилъ нѣсколько тетеревей и зайцовъ; за каждаго тетерева платилъ по 31 коп. а за всякаго зайца по 20 коп. Послѣ покупки нашлось, что за зайцовъ заплачено 7 коп. больше, нежели за тетеревей; спрашивается сколько куплено первыхъ и послѣднихъ.

Рѣшен. Положимъ, число тетеревей x, и число зайцовъ y; то по свойству вопроса будетъ $20y = 31x + 7$, гдѣ $y = \frac{31x+7}{20} = x + \frac{11x+7}{20}$ $= x + p$, въ коемъ $\frac{11x+7}{20} = p$, или $11x + 7$ $= 20p$, откуда найдется $x = \frac{20p-7}{11} = p +$ $\frac{9p-7}{11} = p + r$, гдѣ $\frac{9p-7}{11} = r$, или $9p - 7 =$ $11r$; изъ котораго выйдетъ $p = \frac{11r+7}{9} = r +$ $\frac{2r+7}{9} = r + t$; гдѣ $\frac{2r+7}{9} = t$, или $2r + 7 = 9t$, откуда выйдетъ $r = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t$ $+ u$, по сему $\frac{t-7}{2} = u$ или $t - 7 = 2u$, гдѣ $t = 2u + 7$; отсюда найдется $r = 4t + u =$ $9u + 28$, $p = r + t = 11u + 35$, $x = p + r$ $= 20u + 63 =$ числу тетеревей, $y = x + p$ $= 31u + 98 =$ числу зайцовъ. Изъ сего удобно разумѣть можно, что вмѣсто u отрицатель-

ное

ное число не больше 3хъ взять можно *). И такъ положимъ $u = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ и проч. то будетъ $y = 5, 36, 67, 98, 129, 160$ и проч. $x = 3, 23, 43, 63, 83$ и проч., изъ коихъ каждой рядъ составляетъ изъ безконечнаго числа членовъ Ариѳметическую прогрессію, такъ что у первой разность 31, а у второй 20, изъ коихъ каждая въ разсужденіи x и y равна предстоящему числу величины u.

Примѣчан. Когда въ семъ примѣрѣ прилѣжнѣе разсмотрѣть, какимъ порядкомъ находятся буквы x и y: то найдется, что сіе раждается отъ Геометрическаго содержанія чиселъ 31 и 20, которое основаніе свое имѣетъ на томъ же самомъ порядкѣ, по которому ищется самой большой сихъ чиселъ общій дѣлитель (част. I § 78), какъ изъ слѣдующаго видно: изъ чего легко усмотрѣть можно, что частныя числа въ слѣдующихъ другъ за другомъ изобрѣтеніяхъ буквъ p, r, t, u и проч. выходятъ тѣмъ же порядкомъ, и съ первою буквою на правой рукѣ связываются, а послѣдняя буква остается всегда одинака, что всего удобнѣе видѣть можно изъ слѣдующей таблички, гдѣ напередъ раздробленіе чиселъ 31 и 20 представлено, а потомъ изобрѣтенія буквъ p, r, t и проч. изображаются.

```
20|31|1
  |20|
   11|20|1
     |11|
      9|11|1
       | 9|
        2|9|4
         |8|
          1|2|2
           |2|
            0
```

$31 = 1 \times 20 + 11$	$y = 1.x + p$
$20 = 1 \times 11 + 9$	$x = 1.p + r$
$11 = 1 \times 9 + 9$	$p = 1.r + t$
$9 = 4 \times 2 + 1$	$r = 4.t + u$
$2 = 2 \times 1 + 0$	$t = 2.u \pm n$

Здѣсь въ послѣднемъ изобрѣтеніи буквы берется $+n$, когда число такихъ опредѣленій будетъ нечотное; напротивъ того $-n$, ежели оное будетъ чотное.

Задача XII. Въ трактирѣ будучи, каждой мущина издержалъ 63 коп. женщина 17 коп.; послѣ того содержатель нашолъ, что послѣднія из-

*) поелику когда положимъ $u = -4$, то выйдетъ $y = 31u + 98 = -124 + 98 = -26$ число невозможное.

издержали 5ю копѣйками больше, нежели первые; спраш. число мущинъ и женщинъ.

Рѣшен. Положимъ число женщинъ x, мущинъ y, то будетъ $17x = 63y + 5$, гдѣ $x = \frac{63y+5}{17} = 3y + \frac{12y+5}{17} = 3y + p$, въ коемъ $\frac{12y+5}{17} = p$, или $12y + 5 = 17p$, откуда найдется $y = \frac{17p-5}{12} = p + \frac{5p-5}{12} = p + q$, гдѣ $\frac{5p-5}{12} = q$, или $5p - 5 = 12q$, изъ коего выйдетъ $p = \frac{12q+5}{5} = 2q + \frac{2q+5}{5} = 2q + r$, гдѣ $\frac{2q+5}{5} = r$, или $2q + 5 = 5r$; отсюда выйдетъ $q = \frac{5r-5}{2} = 2r + \frac{r-5}{2} = 2r + t$, гдѣ $\frac{r-5}{2} = t$ или $r - 5 = 2t$, изъ сего выйдетъ $r = 2t + 5$, откуда найдется $q = 5t + 10$, $p = 12t + 25$, $y = 17t + 35$, $x = 63t + 130$. Изъ сего видно, что t можетъ быть принято отрицательнымъ числомъ, которое больше 2хъ быть не можетъ. И такъ положимъ $t = -2, -1, 0, 1, 2$, и прочая, то отсюда найдется $y = 1, 18, 35, 52, 69$ и проч.; $x = 4, 67, 130, 193, 256$ и проч. изъ коихъ каждой рядъ составляетъ безконечнаго числа членовъ Ариѳметическую прогрессію, такъ что у первой разность 17, а у послѣдней 63.

Задача XIII. Найти число, которое бы дѣлилось на 2, а когда раздѣлится на 3 то бы въ остаткѣ было 1.

Рѣшен. Положимъ искомое число $N = 2x$, и $N = 3y + 1$; по сему $2x = 3y + 1$, или $x = \frac{3y+1}{2}$

$\frac{3y+1}{2} = y + \frac{y+1}{2} = y + q$, гдѣ $\frac{y+1}{2} = q$, или $y = 2q - 1$, откуда найдется $x = 3q - 1$, $N = 6q - 2$. Изъ сего видно, что вмѣсто q всякое число взять можно. И такъ положимъ $q = 1$, 2, 3, 4, и проч. то будетъ $N = 4$, 10, 16, 22 и такъ далѣе въ прогрессіи Ариѳметической, у которой разность 6.

Прибавленіе: Естьли потребно будетъ найти два числа такія, чтобы $3x - 5y$ было $= 9$ ти, то сей вопросъ имѣетъ такоежъ рѣшеніе, какъ и предъидущей.

Задача XIV. Найти число, которое бы на 2, на 5 и на 7 дѣлиться могло.

Рѣшен. Положимъ $N = 2x$, $N = 5y$, по сему $2x = 5y$, или $x = \frac{5y}{2} = 2y + \frac{y}{2} = 2y + z$, гдѣ $\frac{y}{2} = z$ или $y = 2z$, а $2x = 10z$, и $x = 5z$. Теперь положи $N = 7r = 10z$, откуда найдется $r = \frac{10z}{7} = z + \frac{3z}{7} = z + u$, гдѣ $\frac{3z}{7} = u$, или $3z = 7u$; изъ сего выйдетъ $z = \frac{7u}{3} = 2u + \frac{u}{3} = 2u + t$, и такъ когда $\frac{u}{3} = t$, то будетъ $u = 3t$, $z = 7t$, $r = 10t$, $y = 14t$, $x = 35t$. $N = 70t$; но какъ число 70 на 2, на 5 и на 7 раздѣлено быть можетъ, то положивъ $t = 1$, 2, 3, 4, 5, 6 и проч. выйдетъ $N = 70$, 140, 210, 280, и такъ далѣе произойдутъ числа, составляющія безконечную Ариѳметическую прогрессію, у которой разность 70.

Задача. XV. Найти число, которое ежели раздѣлится на 8, въ остаткѣ будетъ 5, а будучи раздѣлено на 11, въ остаткѣ 9.

Рѣшен. Положимъ $N=8x+5$, и $N=11y+9$, то будетъ $8x+5=11y+9$, изъ котораго выйдетъ $x=\frac{11y+4}{8}=y+\frac{3y+4}{8}=y+z$, гдѣ $\frac{3y+4}{8}=z$ или $3y+4=8z$, откуда найдется $y=\frac{8z-4}{3}=2z+\frac{2z-4}{3}=2z+p$, гдѣ $\frac{2z-4}{3}=p$, или $2z=3p+4$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $z=\frac{3p+4}{2}=p+\frac{p+4}{2}=p+r$, гдѣ $\frac{p+4}{2}=r$, или $p=2r-4$; откуда найдется $z=3r-4$, $y=6r-8+2r-4=8r-12$, $x=11r-16$, $N=8x+5=88r-123$. Изъ сего видно, что r меньше двухъ быть не можетъ. И такъ положимъ $r=2, 3, 4, 5$ и прочая, то будетъ $N=53, 141, 229, 317$, и такъ далѣе безконечно въ прогрессіи Ариѳметической, у которой разность 88.

Задача XVI. Нѣкто купилъ за 50 рублей разнаго рода 50 скотинъ, какъ-то, коровъ, свиней и овецъ; платилъ за всякую корову по $3\frac{1}{2}$ рубл., за каждую свинью по $1\frac{1}{2}$ рубл., а за овцу по $\frac{1}{2}$ рубл. спраш. сколько каждаго рода скотинъ куплено.

Решен. Положимъ, число коровъ x, свиней y, овецъ z; то будетъ $x+y+z=50$, $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=50$ рубл. или $7x+3y+z=100$; изъ перваго уравненія найдется $z=50-y-x$, которое поставя въ послѣднемъ уравненіи на

мѣсто

мѣсто z, выйдетъ $7x+3y+50-x-y=100$, или $6x+2y=50$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $3x+y=25$, откуда найдется $y=25-3x$, $z=50-25+3x-x=25+2x$. Изъ уравненіяжъ $y=25-3x$ видно, что x больше 8 быть не можетъ. И такъ положимъ $x=8, 7, 6, 5$ и прочая, то найдется I) $y=1$, $z=41$, II) $y=4$, $z=39$ и такъ далѣе выйдетъ восемь рѣшеній, какъ-то изъ предложенной здѣсь таблицы видѣть можно.

$x=8$,	$y=1$,	$z=41$.
- 7,	- 4,	- 39.
- 6,	- 7,	- 37.
- 5,	- 10,	- 35.
- 4,	- 13,	- 33.
- 3,	- 16,	- 31.
- 2,	- 19,	- 29.
- 1,	- 22,	- 27.

Задача. XVII. Нѣкто имѣетъ трехъ пробъ золото, первое 70 й пробы, второе 55 пробы, третье 45 пробы, изъ коего желаетъ сдѣлать 30 лотовъ 60й пробы; спрашивается, сколько котораго въ смѣшеніе взять надлежитъ.

Рѣшен. Положимъ въ смѣшеніе возмется первой пробы x лотовъ, второй y, а третьей z лотовъ, отъ чего выйдутъ слѣдующія уравненія: I) $x+y+z=30$, II) когда возмется $70x+55y+45z$ перваго уравненія, то сумма ихъ будетъ равна суммѣ всѣхъ частей смѣшиваемаго количества, то есть 30 ти 60 разъ взятому или 1800 пробнымъ частямъ; по сей причинѣ $70x+55y+45z=1800$, а по раздѣленіи на 5 выйдетъ $14x+11y+9z=360$; вычти изъ сего уравненія первое девять разъ взятое, останется $5x+2y=90$, откуда найдется $2y=90-5x$ или $y=\frac{90-5x}{2}=45-2x-\frac{x}{2}=45-2x-u$,

гдѣ $u=\frac{x}{2}$ или $x=2u$, по сему $y=45-5u$; но какъ изъ перваго уравненія найдется $z=30-x-y$, по сей причинѣ $z=30-2u-45+5u=3u-15$. Изъ сего видно, что u больше 5 ти, и меньше 9 быть должно; ибо ежели будетъ $u=5$, то будетъ $z=3u-15=15-15=0$; а когда $u=9$, то $y=45-5u=45-45=0$. И такъ положимъ $u=6$, 7 и 8. то будетъ; $x=12$, $y=15$, $z=3$ слѣдовательно сей вопросъ имѣетъ три рѣшенія.

$x=12$	$y=15$	$z=3$
- 14	- 10	- 6
- 16	- 5	- 9

Задача XVIII. За 30 бутылокъ разныхъ винъ заплачено 75 рублей; за каждую бутылку бургонскаго плачено 5 рубл. за бутылку шампанскаго 3 рубли, и за всякую бутылку кагорскаго 2 рубл. спрашивается, сколько бутылокъ каждаго вина куплено.

Рѣшен. Положимъ число бутылокъ перваго x, втораго y, третьяго z, отъ чего произойдутъ слѣдующія уравненія: I) $x+y+z=30$, II) $5x+3y+2z=75$, вычти удвоенное первое уравненіе изъ послѣдняго, останется $3x+y=15$, или $y=15-3x$. Изъ сего удобно разумѣть можно, что x больше 4 хъ быть не можетъ. Теперь вычти второе уравненіе изъ утроеннаго перваго уравненія, останется $z-2x=15$, или $z=15+2x$; но какъ $x<5$, по сему $2x<10$. И такъ положимъ $x=4, 3, 2, 1$, то найдется $y=3, 6, 9, 12$; $z=23, 21, 19, 17$. Слѣдовательно сей вопросъ имѣетъ четыре рѣшенія, изъ коихъ въ каждомъ представляется различное число бутылокъ.

Приба-

Прибавлен. Такимъ же образомъ рѣшится и слѣдующїй вопросъ: нѣкоторой путешественникъ купилъ трехъ родовъ 30 медалей за 75 рубл., изъ коихъ за каждую перваго роду платилъ 5 рубл. втораго 3 рубл. третьяго 2 рубли; требуется число медалей каждаго рода.

Задача XIX. Три купца положили для общаго торгу по нѣскольку рублей, такъ что, ежели число рублей перваго умножить чрезъ 3, втораго чрезъ 5, а третьяго чрезъ 7, то сумма произведенiй будетъ $=560$; но ежели умножить число рублей перваго чрезъ 9 втораго чрезъ 25, а третьяго чрезъ 49, то сумма произведенiй будетъ 2920; спрашивается число денегъ каждаго.

Рѣшен. Положимъ число рублей перваго купца x, втораго y, а третьяго z. то произойдутъ слѣдующїя уравненiя: I) $3x+5y+7z=560$, II) $9x+25y+49z=2920$. Теперь утроенное первое уравненiе вычти изъ втораго, останется $10y+28z=1240$, а по раздѣленiи на 2 выйдетъ $5y+14z=620$; откуда найдется $y=124-2z-\frac{4z}{5}$. Изъ сего видно, что z должно дѣлиться на 5, и такъ положимъ $\frac{z}{5}=u$, или $z=5u$, то найдется $y=124-14u$; слѣдовательно ежели сiи количества поставятся въ первомъ уравненiи, то будетъ $3x+620-70u+35u=560$ или $3x=35u-60$, а по раздѣленiи на 3 выйдетъ $x=11u-20+\frac{2u}{3}=11u-20+t$, гдѣ $\frac{2u}{3}=t$ или $2u=3t$, а по раздѣленiи на 2 выйдетъ $u=\frac{3t}{2}=t+\frac{t}{2}=t+r$, въ

коемъ $\frac{t}{2}=r$ или $t=2r$; откуда найдется $u=3r$, $x=35r-20$, $y=124-42r$, $z=15r$. Изъ сего видно, что r меньше 3 хъ быть должно; ибо въ противномъ случаѣ будетъ $y=124-42r$ $=124-126=-2$ количество невозможное, и нулемъ также быть не можетъ; потому что $x=35r-20$; ибо въ такомъ случаѣ будетъ $x=-20$. И такъ положимъ $r=1, 2$, то выйдетъ $x=15$ или 50, $y=82$ или 40, $z=15$, или 30; слѣдовательно въ семъ вопросѣ заключается только 2 рѣшенія.

Задача XX. 20 лошадей разположить въ 5 ти конюшняхъ такимъ образомъ, чтобы въ каждой было число лошадей нечотное.

Рѣшен. Пусть будетъ число лошадей въ первой конюшнѣ t, во второй u, въ третьей x, въ четвертой y, въ пятой z. Когда t и u суть числа нечотныя, то сумма ихъ $t+u$ непремѣнно будетъ число чотное, которое пусть будетъ $=p$. Равнымъ образомъ и $y+x$ будетъ также число чотное, которое положимъ $=q$; но сумма двухъ чотныхъ $p+q$, также будетъ чотное число $=n$; по сему когда n сложится съ нечотнымъ числомъ z, то сумма сихъ двухъ чиселъ $n+z$, изъ коихъ одно чотное, а другое нечотное, будетъ непремѣнно нечотное; по сей причинѣ и число всѣхъ лошадей должно быть нечотное; но какъ число 20 есть чотное, того ради сей вопросъ есть невозможной.

Вопросъ также будетъ невозможной, ежели должно будетъ 100 лошадей разставить въ 7 конюшняхъ, такъ чтобы въ каждой было нечотное число; поелику 7 нечо-

чотныхъ чиселъ, вмѣстѣ взятыхъ, то есть сумма всѣхъ нечотныхъ чиселъ, также будетъ число нечотное.

Задача XXI. Миронъ да Февронъ, каждой имѣетъ нѣсколько рублей, такъ что ежели къ произведенію изъ числа ихъ денегъ придать сумму всѣхъ денегъ, то выйдетъ число 79; спрашив. число рублей каждаго.

Рѣшен. Положимъ число рублей перваго x втораго y: то по свойству вопроса будетъ $xy+x+y=79$, по сему $xy+y=79-x$, гдѣ $y=\frac{79-x}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1}$; изъ сего видно, что количество $x+1$ есть дѣлитель числа 80. И такъ положимъ, что x и y суть числа цѣлыя и положительныя; по сей причинѣ поставя всѣхъ дѣлителей числа 80, произойдутъ слѣдующія въ приложенной таблицѣ рѣшенія:

дѣлит. числа 80	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
$x=$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
$y=$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

но какъ послѣднія 5 рѣшеній съ первыми одинаки, по сей причинѣ вышло только пять рѣшеній.

Задача XXII. Къ даннымъ числамъ m, a, b и c найти цѣлыя числа x и y, отъ коихъ бы произошло уравненіе $mxy=ax+by+c$.

Рѣшен. Въ данномъ уравненіи по переставкѣ величинъ будетъ $mxy-by=c+ax$, откуда найдется $y=\frac{c+ax}{mx-b}$, а по умноженіи на m выйдетъ $my=\frac{mc+amx}{mx-b}=a+\frac{mc+ab}{mx-b}$. Положимъ $mc+ab=hk$, изъ коего выйдетъ $\frac{mc+ab}{h}=k$; по сему

му

му $my = a + \frac{kh}{mx - b}$. Изъ сего видно, что числитель $mc + ab$ или hk долженъ дѣлиться на $mx - b$. Теперь положивъ $mx - b = h$, будетъ $x = \frac{b + h}{m}$, а $my = a + \frac{hk}{h} = a + k$, или $y = \frac{a + k}{m}$; но поелику $h + b$ должно дѣлиться на m, то здѣсь надлежитъ брать такихъ дѣлителей количества $mc + ab$, которые будучи сложены съ b, могли бы дѣлиться на m. И такъ положимъ $m = 4$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 222$, то выйдетъ $my = a + \frac{mc + ab}{mx - b} = 4y = 2 + \frac{894}{4x - 3}$, въ коемъ дѣлители числа 894 суть 1.2, 3, 6, 149, 298.447.894; но какъ $x = \frac{h + b}{m} = \frac{h + 3}{4}$, то здѣсь должно брать такихъ дѣлителей вмѣсто h, кои будучи сложены съ 3мя, могли бы дѣлиться на 4. И такъ пусть будетъ $h = 1$, то выйдетъ $x = \frac{1 + 3}{4} = 1$, $k = 894$, по сему $y = \frac{a + k}{m} = \frac{896}{4} = 224$. Естьлижъ положимъ $h = 149$, то будетъ $x = \frac{149 + 3}{4} = 38$, $k = 6$, $y = 2$.

Примѣчан. Изъ общаго рѣшенія предложеннаго вопроса видно, что $my - a = \frac{ab + mc}{mx - b}$, слѣдственно не трудно найти числа, на которыя бы количество $ab + mc$ безъ остатка дѣлиться могло; ибо по умноженіи знаменателемъ $mx - b$, будетъ $(my - a).(mx - b) = ab + mc$. И такъ положимъ $m = 10$, $a = 8$, $b = 6$ и $c = 20$, то уравненіе изобразится такимъ образомъ: $(10y - 8).(10x - 6) = 48 + 200 = 248$, а по раздѣленіи на $10x - 6$ выйдетъ $10y - 8 = \frac{248}{10x - 6}$; по сему число 248 на $10x - 6$ безъ остатка дѣ-

дѣлиться должно; но какъ дѣлители числа 248 суть 1, 2, 4, 8, 62, 124, 248, то положимъ I) $10x-6=4$, или $x=\frac{4+6}{10}=1$, II) $10x-6=124$, гдѣ выйдетъ $x=\frac{124+6}{10}=13$; отсюда найдется I) $10y-8=\frac{248}{10-6}=\frac{248}{4}=62$, а переставя величины и раздѣля на 10 выйдетъ $y=\frac{70}{10}=7$, II) $10y-8=\frac{248}{130-6}=\frac{248}{124}=2$, откуда найдется $y=\frac{2+8}{10}=1$.

Задача XXIII. Іофанъ имѣетъ число рублей x, а Митрофанъ y, отъ коихъ происходитъ уравненіе $5xy=2x+3y+18$; требуется знать число рублей каждаго.

Рѣшен. Изъ предположеннаго уравненія $(my-a)\times(mx-b)=ab+mc$, выйдетъ $(5y-2).(5x-3)=6+90=96$, а по раздѣленіи на $5x-3$ найдется $5y-2=\frac{96}{5x-3}$. Изъ сего удобно разумѣть можно, что изъ дѣлителей числа 96 надлежитъ брать такихъ, которые бы равны были $5x-3$, или будучи сложены съ 3 на 5 дѣлиться могли; но какъ дѣлители числа 96 суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96; изъ коихъ требуемые дѣлители будутъ 2, 12 и 32. И такъ положимъ $5x-3=2$, то будетъ $x=\frac{2+3}{5}=1$, а $5y-2=\frac{96}{2}=48$, по сему $5y=48+2=50$, или $y=\frac{50}{5}=10$; естьлижъ положимъ $5x-3=12$, то будетъ $x=3$, а $y=2$; и наконецъ когда положимъ $5x-3=32$, то найдется $x=7$, $y=1$; слѣдовательно сей вопросъ имѣетъ только три рѣшенія.

Примѣчан. Такимъ же образомъ рѣшить можно уравненіе $xy+dx^2=hx^3+ax+by+c$, только бы y всегда былъ первой степени.

Задача XXIV. Павелъ имѣетъ число лошадей x, а Петръ y, такъ что отъ сего произойдетъ уравненіе $x^2+xy=2x+3y+29$; спрашивается число лошадей каждаго.

Рѣшен. Изъ даннаго уравненія найдется $y=\frac{2x-x^2+29}{x-3}=-x-1+\frac{26}{x-3}$, а переставя величины изъ одной части въ другую будетъ $y+x+1=\frac{26}{x-3}$. Изъ сего видно, что $x-3$ заключается между дѣлителями числа 26, которое будучи раздѣлено на $x-3$, частное будетъ $=y+x+1$; но дѣлители числа 26 суть 1, 2, 13, 26. И такъ ежели для рѣшенія сего вопроса положимъ $x-3=1$ или $x=4$, то будетъ $y+x+1=y+5=26$, по сему $y=26-5=21$; естьлижъ положимъ $x-3=2$, то будетъ $x=5$, а $y=7$; а когда положимъ $x-3=13$ или $x=13+3=16$, то будетъ $y=-15$. Сія послѣдняя величина, будучи отрицательною, въ рѣшеніе принята быть не можетъ.

§ 190. Теперь предлагается здѣсь о такихъ неопредѣленныхъ вопросахъ, въ которыхъ неизвлекомыя или глухія количества только второй степени превращаются въ извлекомыя, или въ такія, изъ которыхъ требуемой квадратной корень найти можно, какъ *на примѣръ*: величину $a+bx+cx^2$, которая совершеннаго корня въ себѣ не заключаетъ, сдѣлать извлекомою, то

то есть найти такую величину вмѣсто x, чтобы величина $a+bx+cx^2$ была дѣйствительной квадратъ, дабы посредствомъ извѣстныхъ буквъ b и c, отъ коихъ зависитъ изобрѣтеніе неизвѣстной буквы x, можно было изъявить корень извлекомою величиною.

Примѣч. Во многихъ случаяхъ рѣшенія таковыхъ вопросовъ бываютъ не возможны; но ежели рѣшеніе будетъ возможно, то должно по крайней мѣрѣ въ изобрѣтеніи буквы x довольствоваться одною только извлекомою величиною, и не требовать, чтобы они были еще и цѣлыя числа; ибо таковые вопросы требуютъ особливаго разрѣшенія.

Задача I. Требуется данную неизвлекомую величину $\sqrt{(a+bx)}$ превратить въ извлекомую, то есть сдѣлать такою величиною, изъ которой бы квадратной корень найти было можно.

Рѣшен. Положимъ, $\sqrt{(a+bx)}=y$, то будетъ $a+bx=y^2$, откуда найдется $x=\frac{yy-a}{b}$. Пусть $a=5$, $b=2$. Теперь надлежитъ вмѣсто y взять такое число котораго бы квадратъ былъ больше 5 ти. И отъ того произшедшее число равное y^2-a на два дѣлиться могло. И такъ положимъ $y=3, 5, 7$ и проч. то будетъ $x=\frac{9-5}{2}=2$, или $\frac{25-5}{2}=10$, также и $\frac{49-5}{2}=22$ и такъ далѣе; по сей причинѣ въ первомъ случаѣ $\sqrt{(a+bx)}=\sqrt{(5+2.2)}=\sqrt{9}=3$; во второмъ $\sqrt{(a+bx)}=\sqrt{(5+2.10)}=\sqrt{25}=5$; въ третьемъ $\sqrt{(a+bx)}=\sqrt{(5+2.22)}=\sqrt{49}=7$ и проч.

Задача II. Найти число, котораго бы квадратъ, сложенной съ единицею, было квадратноежъ число.

Рѣшен. I. Положимъ $\sqrt{(1+x^2)} = x + p$, будетъ $1 + x^2 = x^2 + 2px + p^2$, или $1 - p^2 = 2px$, а по раздѣленіи на $2p$ найдется $x = \frac{1-pp}{2p}$, гдѣ вмѣсто p всякое число взять можно, котораго бы квадратъ вычтенной изъ единицы на свой удвоенной корень безъ остатка дѣлиться могъ; но какъ сіе не такъ скоро найти можно, то положимъ $p = \frac{m}{n}$, отъ чего выйдетъ $x = (1 - \frac{mm}{nn}) : \frac{2m}{n} = (\frac{nn - mm}{nn}) : \frac{2m}{n} = \frac{n^3 - m^2 n}{2mnn} = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$. Теперь положимъ $n = 2, 3, 5$ и проч. $m = 1, 1$ и проч., то найдется $x = \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{12}{5}$, и для того будетъ $\sqrt{(1 + x^2)} = \sqrt{(1 + \frac{9}{16})} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$. $\sqrt{(1 + x^2)} = \sqrt{(1 + \frac{16}{9})} = \frac{5}{3}$; и $\sqrt{(1 + x^2)} = \sqrt{(1 + \frac{144}{25})} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$ и проч.

Другимъ образомъ: Положимъ $\sqrt{(1+x^2)} = 1 + \frac{mx}{n}$. Квадратъ каждой части сего уравненія будетъ $1 + x^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$; а по исключеніи знаменателей и по раздѣленіи на x найдется $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn} = \frac{2mn}{nn} + \frac{mmx}{nn}$, въ коемъ по переставкѣ величинъ выйдетъ $x - \frac{mmx}{nn} = \frac{2mn}{nn}$, или $\frac{nnx - mmx}{nn} = \frac{2mn}{nn}$, то есть $nnx - mmx = 2mn$, а по раздѣленіи на $nn - mm$ найдет-

ся

ся $x = \frac{2mn}{nn - mm}$; по сей причинѣ $1 + x^2 = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2n^2m^2 + m^4} = \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$, и $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$. Изъ сего видно, что и $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn - mm)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(n^2 - m^2)^2}$, или $(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$. И такъ ежели положимъ $n = 2 . 3, 5$ и прочая, $m = 1, 1, 1$ и такъ далѣе, то будетъ также, $x = \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}$ и проч.

Задача III. Найти два числа, коихъ бы сумма квадратовъ было число совершенный квадратъ.

Рѣшен. Пусть будетъ $x^2 + y^2 = z^2$. Положи $x = 2nm$, $y = n^2 - m^2$; но какъ сумма квадратовъ $x^2 + y^2 = (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = z^2$; то отсюда найдется $z = n^2 + m^2 = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. И такъ положимъ $m = 1$, $n = 2$, то найдется безконечное число различныхъ чиселъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$m = 1$,	$n = 2$,	$x = 4$,	$y = 3$,	$z = 5$
1,	3	6	8	10
2	4	16	12	20
3	5	30	16	34 и такъ далѣе.

Задача IV. Найти два числа, коихъ бы разность квадратовъ было число квадратное.

Рѣшен. Положимъ искомыя числа x, y и z, и что $z^2 - x^2 = y^2$; но какъ по предъидущей задачѣ $z = n^2 + m^2$, $x = 2mn$, $y = n^2 - m^2$, то будетъ $z^2 - x^2 = y^2 = (n^2 + m^2)^2 - (2mn)^2 = (n^2 - m^2)^2$. И такъ пусть $n = 3$, $m = 1$, то найдется безконечное число требуемыхъ величинъ

личинъ, какъ изъ слѣдующаго видно:

$m=1$,	$n=3$,	$z=10$,	$x=6$,	$y=8$	
2	4	20	16	12	
4	5	41	40	9	и такъ далѣе.

Задача V. Сумму двухъ квадратныхъ чиселъ a^2+b^2 раздѣлить на два другія квадратныя числа.

Рѣшен. Положимъ корень перваго требуемаго квадрата $x-a$, а корень вторaго $nx-b$; то будетъ $(x-a)^2+(nx-b)^2=a^2+b^2$, или $x^2-2ax+a^2+n^2x^2-2nbx+b^2=a^2+b^2$; откуда найдется $x^2+n^2x^2=2ax+2nbx$, а по раздѣленіи на x выйдетъ $x+n^2x=2nb+2a$, или $x=\frac{2nb+2a}{1+nn}$. Теперь надлежитъ взять вмѣсто n какое нибудь неизвлекомое число больше 1цы; ибо ежели возмется $n=1$, то будетъ $x=b+a$, и число $x-a$ будетъ $=b$, по сей причинѣ сумму a^2+b^2 двухъ данныхъ квадратовъ на два другіе квадрата раздѣлить будетъ не можно. Пусть будетъ $n=2$, то найдется $x=\frac{4b+2a}{5}$; и такъ ежели положимъ $b=3$, $a=5$, то найдется $x=\frac{22}{5}$, $x-a=-\frac{3}{5}$ и $nx-b=\frac{44}{5}-3=\frac{29}{5}$; квадраты сихъ чиселъ будутъ $\frac{9}{25}$ и $\frac{841}{25}$, коихъ сумма $\frac{850}{25}=34$ равна суммѣ квадратовъ $9+25=a^2+b^2$.

Задача VI. Найти такое число x, которое ежели придано будетъ къ каждому изъ двухъ данныхъ чиселъ a и b, то бы произошли квадраты.

Рѣшен. По свойству вопроса $a+x$, также и $b+x$ будутъ совершенные квадраты. Положимъ

жимъ корень перваго квадрата $m + n$, а корень втораго $m - n$, то будетъ $a + x = m^2 + 2mn + n^2$ (A), $b + x = m^2 - 2mn + n^2$ (B). Вычти послѣднее уравненіе изъ перваго, останется $a - b = 4mn$. Изъ сего видно, что $mn = \frac{1}{4}(a-b)$, то есть mn составляютъ одну четверть разности двухъ данныхъ чиселъ, которая заключаетъ въ себѣ двухъ множителей m и n, коими составлены требуемые корни $m + n$ и $m-n$; но какъ изъ уравненія A найдется $x = m^2 + 2mn + n^2 - a$, то положа $a = 35$, $b = 11$, выйдетъ $a-b = 24 = 4mn$, гдѣ $mn = \frac{24}{4} = 6 = 3.2$. И такъ положимъ $m = 3$, и $n = 2$, то будетъ $m + n = 5$, $m - n = 1$, изъ сего найдется $x + a = 25$ и $x + b = 1$, по сему $x = 25 - a = 25 - 35 = -10$, также $x = 1 - b = 1 - 11 = -10$; слѣдовательно $35 - 10 = 25$, и $11 - 10 = 1$, суть числа квадратныя. Ежели положимъ $a = 31$, $b = 20$, то будетъ $a - b = 11 = 4mn$, гдѣ $mn = \frac{11}{4} = \frac{11}{2} \times \frac{1}{2}$; и такъ положимъ $m = \frac{11}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, то требуемыхъ квадратовъ первой корень будетъ $m + n = 6$, $m-n = 5$, по сему $a + x = 36$, $b + x = 25$, слѣдовательно $x = 36 - a = 36 - 31 = 5$, и $x = 25 - b = 25 - 20 = 5$, по сему $31 + 5 = 36$, и $20 + 5 = 25$ суть числа квадратныя.

Задача VII. Данную величину $\sqrt{(2zz + 1)}$, въ которой z должно быть цѣлое число, сдѣлать совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(2zz + 1)} = z + p$, то будетъ $2zz + 1 = z^2 + 2pz + p^2$, откуда найдется $z^2 - 2zp = p^2 - 1$, гдѣ $z = p$ $\pm$

$\pm \sqrt{(2p^2 - 1)}$. ИзЪ сего видно, ежели положимЪ $p = 1$, то будетЪ неизвлекомое количество $z = 2$, чрезЪ что найдется $\sqrt{(2z^2 + 1)} = 3$. Теперь положимЪ $p = 5$, то будетЪ $z = 5 + \sqrt{49} = 12$, и $\sqrt{(2z^2 + 1)} = \sqrt{289} = 17$ и такЪ далѣе, надлежитЪ вмѣсто p брать такое число, котораго бы удвоенной квадратЪ безЪ единицы было совершенное квадратное число.

Задача VIII. Полагая z цѣлымЪ числомЪ, сдѣлать величину $\sqrt{(3z^2 + 1)}$ совершеннымЪ квадратомЪ.

Рѣшен. Пусть будетЪ $\sqrt{(3z^2 + 1)} = z + p$, откуда выйдетЪ $3z^2 + 1 = z^2 + 2pz + p^2$, а по переставкѣ величинЪ найдется $2z^2 - 2zp = p^2 - 1$, гдѣ будетЪ $z = \frac{p + \sqrt{(3pp - 2)}}{2}$; откуда неизвлекомое количество z найдется ежели положимЪ $p = 1$, то будетЪ $z = 1$, и $\sqrt{(3z^2 + 1)} = 2$. Естьли положимЪ $p = 11$, то будетЪ $z = \frac{11 + \sqrt{(363 - 2)}}{2} = \frac{11 + 19}{2} = 15$, и $\sqrt{(3z^2 + 1)} = \sqrt{676} = 26$, и такЪ далѣе.

Задача IX. Полагая z цѣлымЪ числомЪ, найти совершенной корень неизвлекомой величины $\sqrt{(5z^2 + 1)}$, вЪ которой корень больше $2z$.

Рѣшен. ПоложимЪ данное количество $\sqrt{(5z^2 + 1)} = 2z + p$, откуда выйдетЪ $5z^2 + 1 = 4z^2 + 4zp + p^2$, а по переставкѣ величинЪ найдется $z^2 - 4zp = p^2 - 1$, изЪ коего сыщется $z = 2p + \sqrt{(5p^2 - 1)}$. ПоложимЪ $p = 1$, по

сему будетъ $z = 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$, и $\sqrt{(5z^2 + 1)} = \sqrt{81} = 9$.

Задача X. Полагая z цѣлымъ числомъ, найти совершенной корень неизвлекомой величины $\sqrt{(6z^2 + 1)}$, въ которой корень между $2z$ и $3z$ заключаться долженъ.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(6z^2 + 1)} = 2z + p$, откуда найдется $6z^2 + 1 = 4z^2 + 4zp + p^2$, а по переставкѣ величинъ выйдетъ $2z^2 - 4zp = p^2 - 1$, изъ коего по правиламъ уравненія второй степени сыщется $z = p + \frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$. Изъ сего видно, что z больше $2p$, слѣдовательно $p > 1$; и такъ положимъ $z = 2p + q$, то изъ предъидущаго уравненія можно будетъ сдѣлать слѣдующее: $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}$ или $2p + 2q = \sqrt{(6p^2 - 2)}$, въ коемъ квадратъ первой части будетъ $4p^2 + 8pq + 4q^2 = 6p^2 - 2$, откуда найдется $2p^2 - 8pq = 4q^2 + 2$, и $p^2 - 4pq = 2q^2 + 1$, гдѣ будетъ $p = 2q + \sqrt{(6q^2 + 1)}$. Положимъ $q = 0$, то будетъ $p = 1$, $z = 2$, и $\sqrt{(6z^2 + 1)} = 5$.

Задача XI. Найти совершенной корень неизвлекомой величины $\sqrt{(7z^2 + 1)}$, въ которой z долженъ быть цѣлое число.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(7z^2 + 1)} = m$; изъ чего видно, что $m > 2z$, по сей причинѣ принявъ $2z + p$ вмѣсто m, будетъ $7z^2 + 1 = 4z^2 + 4zp + p^2$, или $3z^2 - 4zp = p^2 - 1$; откуда найдется $z = \frac{2p + \sqrt{(7p^2 - 3)}}{3}$. Изъ сего видно, что $z > \frac{4p}{3}$, и слѣдовательно больше, не-

жели

жели p; и такъ положимъ $z = p + q$, отъ чего будетъ $p + 3q = \sqrt{(7p^2 - 3)}$, или $p^2 + 6pq + 9q^2 = 7p^2 - 3$, по сему $6p^2 - 6pq = 9q^2 + 3$, а по раздѣленіи на 3 выйдетъ $2p^2 - 2pq = 3q^2 + 1$, откуда найдется $p = \frac{q + \sqrt{7qq + 2}}{2}$. Но какъ и здѣсь $p > q$, то пусть $p = q + r$, отъ чего выйдетъ $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$, а приведя обѣ части въ квадраты, будетъ $q^2 + 4qr + 4r^2 = 7q^2 + 2$, или $6q^2 - 4qr = 4r^2 - 2$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $3q^2 - 2qr = 2r^2 - 1$; откуда найдется $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 3)}}{3}$. Изъ сего видно, что $q > r$, для сего положимъ $q = r + s$; и такъ поставя сіе количество на мѣсто q, найдется $2r + 3s = \sqrt{(7r^2 - 3)}$, или $4r^2 + 12rs + 9s^2 = 7r^2 - 3$, а изъ сего выйдетъ $3r^2 - 12rs = 9s^2 + 3$, или $r^2 - 4r = 3s^2 + 1$, откуда найдется $r = 2s + \sqrt{(7s^2 + 1)}$. Теперь положимъ $s = 0$, то найдется $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$, $z = 3$, $m = 8$.

Примѣчан. Сей вопросъ можно рѣшить и другимъ образомъ; ибо $7z^2 + 1 = m^2$ по положенію, то изъ сего видно, что $m < 3z$; и такъ положимъ $m = 3z - p$, отъ чего выйдетъ $7z^2 + 1 = 9z^2 - 6pz + p^2$, или $2zz - 6pz = -p^2 + 1$; откуда найдется $z = \frac{3p + \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$. Изъ сего видно, что $z < 3p$; для сего пусть будетъ $z = 3p - q$, которое поставя на мѣсто z, будетъ $3p - 2q = \sqrt{(7p^2 + 2)}$, коихъ квадраты $9p^2 - 12pq + 4q^2 = 7p^2 + 2$, или по сокращеніи уравненія выйдетъ $p^2 - 6pq = -2q^2 + 1$, гдѣ $p = 3q + \sqrt{(7q^2 + 1)}$. И такъ положимъ $q = 0$, то выйдетъ $p = 1$, $z = 3$, и $m = 8$ тоже, что и прежде.

За-

Задача XII. Неизвлекомую величину $\sqrt{(a^2 + bx + cx^2)}$ сдѣлать совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Положимъ корень даннаго количества $= a + \frac{mx}{n}$, отъ чего выйдетъ $a^2 + bx + cx^2 = a^2 + (\frac{2am}{n}) x + (\frac{mm}{nn}) x^2$, изъ коихъ въ каждой части уничтоживъ a^2, раздѣли на x, выйдетъ $b + cx = \frac{2am}{n} + (\frac{mm}{nn}) x$, откуда найдется $x = \frac{2amn - bnn}{nnc - mm}$. И такъ поставя сіе количество въ положенномъ корнѣ вмѣсто x, будетъ $a + \frac{mx}{n} = a + \frac{2amm - mnb}{nnc - mm} = \frac{nnac + amm - bnm}{nnc - mm} = \sqrt{(a^2 + bx + cx^2)}$. Ежели положимъ $a = 0$, то данная величина будетъ $\sqrt{(bx + cx^2)}$, которой квадратной корень по положенію будетъ $= \frac{mx}{n}$, по сему $bx + cx^2 = (\frac{mm}{nn}) x^2$, а по раздѣленіи на x выйдетъ $b + cx = (\frac{mm}{nn})x$, или $bnn + cnnx = mmx$, откуда найдется $x = \frac{bnn}{mm - cnn}$. И такъ поставя сію величину вмѣсто x, будетъ $\sqrt{(bx + cx^2)} = \frac{bmn}{mm - cnn}$. Пусть будетъ $b = c = 2$, $m = 3$ и $n = 2$, то будетъ $x = 8$, и $\sqrt{(2x + 2x^2)} = 12$.

Задача XIII. Неизвлекомую величину $\sqrt{(a + bx + c^2x^2)}$ сдѣлать совершеннымъ квадратомъ.

Рѣшен. Пусть будетъ $\sqrt{(a + bx + c^2x^2)} = cx + \frac{m}{n}$, то выйдетъ $a + bx + c^2x^2 = c^2x^2 + (\frac{2cm}{n})x + \frac{mm}{nn}$. Умножь каждую часть чрезъ nn, и сдѣлавъ сокращеніе, найдется $x = \frac{mm - ann}{bnn - 2cmn}$. И такъ поставя сіе число вмѣсто x, будетъ $\sqrt{(a + bx + ccx^2)} = \frac{cmm - acnn}{bnn - 2cmn} + \frac{m}{n}$, въ которомъ вмѣсто m и n для сысканія x всякое произвольное число взять можно.

Задача XIV. Сдѣлать совершеннымъ квадратомъ неизвлекомую величину $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$, которую изъ двухъ другихъ множителей $(d + qx) \times (h + kx)$ представить можно.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{(d + qx) \times (h + kx)} = \frac{m.(d + qx)}{n}$, то по возвышеніи во вторую степень, выйдетъ $(d + qx).(h + kx) = \frac{mm\ (d + qx)^2}{nn}$; откуда найдется $hnn + knnx = mm.(d + qx)$, и будетъ $x = \frac{dmm - hnn}{knn - qmm}$, которую поставя вмѣсто x, найдется требуемая величина..

Для изъясненія сего пусть будетъ сей вопросъ: найти такое число x, когда изъ удвоеннаго квадрата сего числа вычтется 2, то бы остатокъ былъ квадратъ. Представимъ сію величину изъ двухъ множителей, то есть $2x^2 - 2 = 2.(x + 1).(x - 1)$, то принявъ за корень оной $\frac{m(x + 1)}{n}$, будетъ $2.(x + 1).(x - 1) = \frac{mm}{nn}.(x + 1)^2$. Умножь каждую чрезъ nn, а по-

томъ раздѣли чрезъ $x+1$, выйдетъ $2nnx - 2nn = mmx + mm$, откуда найдется $x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Ежели положимъ $m = n = 1$, то выйдетъ $x = 3$, и $2xx - 2 = 16$. Ежели $m = 3$, $n = 2$, то найдется $x = -17$; но поелику здѣсь въ разсужденіе берется x, то все равно, возьмется ли $x = -17$, или $x = +17$, то изъ обоихъ выйдетъ $2xx - 2 = 576 =$ квадрату изъ числа 24.

Задача XV. Сдѣлать совершеннымъ квадратомъ величину $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$, состоящую изъ двухъ частей, изъ коихъ одна есть квадратъ, а другая есть произведеніе двухъ множителей.

Рѣшен. Положимъ, даннаго количества $a+bx+cx^2$ первая часть изобразится чрезъ p^2+qr, гдѣ p, q и r производятъ величину $d+gx$; тогда надлежитъ только положить $\sqrt{(pp+qr)} = p+\frac{mq}{n}$, откуда выйдетъ $pp+qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mmqq}{nn}$. Въ семъ уравненіи уничтоживъ въ обѣихъ частяхъ p^2 и раздѣля на q, найдется $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mmq}{nn}$, или $nnr = 2mnp + mmq$, откуда легко уже найдется x, какъ изъ слѣдующаго видно.

Положимъ, требуется найти такое число x, коего бы удвоенной квадратъ безъ единицы составлялъ совершенной квадратъ, то есть $2x^2 - 1$ былъ бы квадратъ. Сію величину можно представить такимъ образомъ: $xx + xx - 1 = xx + (x-1).(x+1)$; и такъ естьли положимъ

корень предложенной величины $= x + \frac{m.(x+1)}{n}$, то будетъ $xx + (x-1)\times(x+1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, въ коемъ отнявъ отъ обѣихъ частей x^2 и потомъ раздѣля на $x+1$, и уничтожа дроби, выйдетъ $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$, откуда найдется $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; но поелику въ предложенномъ вопросѣ принимается въ разсужденіе только x^2, то положительной ли или отрицательной выйдетъ x, все равно; слѣдственно и вмѣсто $-m$ можно поставить $+m$, дабы только получить $x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Пусть будетъ $m = n = 1$, то найдется $x = 1$, и $2x^2 - 1 = 1$. Ежели положимъ $m = 1$, $n = 2$, будетъ $x = \frac{5}{7}$, и $2x^2 - 1 = \frac{1}{49}$; а когда возьмется $m = 1$ и $n = -2$, то выйдетъ $x = -5$ или $x = +5$, а $2xx - 1 = 49$.

Ежели потребно будетъ найти такое число x, чтобы $2xx + 2$ было квадратъ: то представя себѣ первую часть сего числа $= 4$, будетъ $2xx + 2 = 4 + 2(x+1).(x-1)$, въ которомъ корень пусть будетъ $2 + \frac{m(x+1)}{n}$, откуда найдется $x = \frac{4mn + mm + 2nn}{2nn - mm}$, чрезъ что вопросъ уже и разрѣшенъ. Теперь положимъ $m = 1$ и $n = 1$, то будетъ $x = 7$, и $2xx + 2 = 100$.

Задача XVI. Найти число x, отъ котораго произшедшее количество $5xx + 3x + 7$ было бы совершенной квадратъ.

РѢ-

Рѣшен. Положимъ $x = z - 1$, то предложенная величина будетъ $= 5z^2 - 7z + 9$, которой квадратной корень положимъ $= 3 - \frac{mz}{n}$; по сей причинѣ будетъ $5zz - 7z + 9 = 9 - \frac{6mz}{n} + \frac{mmzz}{nn}$, въ которомъ отнявъ отъ обѣихъ частей 9, потомъ раздѣля чрезъ z и изключивъ дробь, будетъ $5nnz - 7nn = mmz - 6mn$, откуда найдется $z = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}$, а наконецъ сыщется $x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm}$. И такъ ежели положимъ $m = 2$, $n = 1$, то будетъ $x = -6$, и слѣдственно $5xx + 3x + 7 = 169 =$ квадрату отъ числа 13 ти.

Задача XVII. Найти, сколько Геркулесъ и Ахиллесъ имѣли денегъ, когда сумма квадратовъ изъ чиселъ ихъ денегъ равна суммѣ квадратовъ изъ чиселъ Петровыхъ и Павловыхъ денегъ.

Рѣшен. Положимъ число Петровыхъ денегъ $= a$, Павловыхъ b, сумма квадратовъ сихъ чиселъ будетъ $a^2 + b^2$. И такъ положимъ число Геркулесовыхъ денегъ $mx - a$, а число Ахиллесовыхъ $nx - b$, сумма квадратовъ сихъ чиселъ будетъ $mmxx - 2amx + a^2 + nnxx - 2bnx + b^2 = a^2 + b^2$, откуда найдется $x = \frac{2am + 2nb}{mm + nn}$. Поставя сіе количество въ числахъ $mx - a$ и $nx - b$ вмѣсто x, вопросъ рѣшенъ будетъ.

Задача XVIII. Найти два числа такія, чтобы разность ихъ квадратовъ равна была данному числу a.

Рѣшен. Положимъ требуемыя числа будутъ $mx + n$ и $mx - n$, разность ихъ квадратовъ будетъ $4mnx = a$; по сему $x = \frac{a}{4mn}$. И такъ требуемыя числа, кои мы положили, будутъ $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$. Ежели положимъ данная разность $a = 2$: то сіи числа будутъ $\frac{1}{2n} + n$, и $\frac{1}{2n} - n$. Пусть будетъ $n = 1$, то найдутся требуемыя числа $\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, или $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$: ибо квадратъ отрицательнаго числа будетъ такой же, какъ и отъ $\frac{1}{2}$ положительной. Ежели $n = 2$, то сіи числа будутъ $\frac{9}{4}$ и $-\frac{7}{4}$, или $\frac{9}{4}$ и $\frac{7}{4}$ и такъ далѣе.

Увѣдомленіе. Дабы не увеличить подобными предложеніями сихъ листовъ, и не удалить учащагося отъ настоящаго предмета Алгебры, то оставя сіе отдѣленіе, предлагается здѣсь о фигурныхъ числахъ, за коими слѣдуютъ вышнихъ степеней уравненія. Желающій же упражняться далѣе въ неопредѣленной Аналитикѣ, можетъ болѣе выполнить свое удовольствіе, принявъ въ пособіе вторую часть универсальной Ариѳметики Г. Эйлера, которая почти вся наполнена важнѣйшими сей части Алгебры предложеніями.

О строкахъ или порядкахъ полигонныхъ (угольныхъ) и фигурныхъ чиселъ.

§ 191. *Опредѣлен.* Строка или порядокъ, произходящій отъ совокупленія чиселъ, изъ коихъ одни послѣ другихъ прибываютъ или убываютъ по одинакому закону, именуются числами фигурными.

§ 192. *Определен.* *Числа полигонныя* или *угольныя* суть тѣ, кои произходятъ отъ сложенія предъидущихъ членовъ прогрессіи Ариѳметической, начинающейся отъ единицы. *На примѣръ*: ежели въ прогресіи Ариѳметической 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч., у которой разность 1, начать складывать по порядку предъидущія числа, то произойдетъ порядокъ треугольныхъ чиселъ, какъ-то 1, 3, 6, 10, 15, 21 и проч. *)

Отъ прогрессіи Ариѳметической 1, 3, 5, 7, 9 и проч., у которой разность 2, произойдутъ числа четвероугольныя или квадратныя 1, 4, 9, 16, 25, 36 и проч. **)

Ежели въ прогрессіи Ариѳметической 1, 4, 7, 10, 13 и проч. разность 3, то произойдетъ порядокъ пятиугольныхъ чиселъ 1, 5, 12, 22, 35 и проч. ***)

Отъ прогрессіи Ариѳметической 1, 5, 9, 13, 17 и проч., у которой разность 4, произой-

---

*) Сіи числа изобразить можно точками, составляющими треугольники какъ-то: ., ∴, ⁘, ... и проч.

**) Отъ разположенія коихъ точками произойдутъ квадраты ., ∷, ⁙, ... и прочая.

***) Что и точками изображается ., ⁘, ... и прочая.

детъ порядокъ шестиугольныхъ чиселъ, какъ-то: 1, 6, 15, 28, 45 и проч.

и такъ далѣе.

§ 193. *Примѣчан.* Ежели положимъ число членовъ всякой Ариѳметической прогрессiи изъ составляющихъ угольныя числа $=n$; то всякое полигонное или угольное число будетъ не что иное, какъ сумма членовъ Ариѳметической прогрессiи, составляющей угольное число. И такъ для сысканiя всякаго треугольнаго числа, выйдетъ слѣдующiй образецъ: то есть всякое треугольное число $=(n+1)\frac{n}{2}=\frac{nn+n}{2}$ (§ 144).

Квадратное $=[(n-1)2+2]\frac{n}{2}=\frac{2nn}{2}=n^2$.

Пятиугольное $=\frac{n.(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$.

Шестиугольное $=\frac{n.(4n-2)}{2}=\frac{4nn-2n}{2}=2n^2-n$.

Семиугольн. число $=\frac{n.(5n-3)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$.

VIII угольное $=\frac{n.(6n-4)}{2}=\frac{6nn-4n}{2}=3n^2-2n$.

IX угольное $=\frac{n.(7n-5)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

X угольное $=\frac{n.(8n-6)}{2}=\frac{8nn-6n}{2}=4n^2-3n$.

XI угольное $=\frac{n.(9n-7)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$.

XII угольное $=\frac{n(10n-8)}{2}=\frac{10nn-8n}{2}=5n^2-4n$.

И вообще образецъ m угольныхъ чиселъ будетъ слѣдующiй: $\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$.

За-

Задача. I. Найти треугольное число, котораго сторона или число членовъ Ариѳметической прогрессіи 8.

Рѣшен. Взявъ образецъ $\frac{nn+n}{2}$ треугольнаго числа за основаніе, положи $n=8$, то будетъ треугольное число $\frac{nn+n}{2}=\frac{64+8}{2}=36$.

Задача. II. Найти 9 тиугольное число, котораго бокъ или число членовъ Ариѳметической прогрессіи 7.

Рѣшен. Соображаясь съ общимъ образцемъ рѣшенія угольныхъ чиселъ, положи $m=9$, $n=7$, то будетъ девятиугольное число $\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}=\frac{(9-2).49-(9-4)7}{2}=\frac{343-35}{2}=154$.

Прибавлен. Ежели потребно будетъ найти двухъугольное число, котораго бокъ или число членовъ 6: то положа $m=2$, $n=6$, найдется $\frac{(2-2)36-(2-4)6}{2}=\frac{12}{2}=6$, по сему всякое двухъугольное число $=n$, слѣдовательно числа двухъугольныя суть числа натуральныя, какъ-то, 1, 2, 3, 4, и прочая.

Задача III. Дано треугольное число a, найти онаго корень или число, бокъ онаго составляющее.

Рѣшен. Положимъ искомое число x, то будетъ треугольное число $\frac{xx+x}{2}=a$, или $x^2+x=2a$, откуда найдется $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{8a+1}{4})}$ $=\frac{-1\pm\sqrt{(8a+1)}}{2}$. Пусть будетъ $a=15$, то най-

дется $x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1+11}{2} = \frac{10}{2} = 5$, искомое число.

Задача IV. Дано пятиугольное число a, найти онаго корень или бокъ.

Рѣшен. Общій образецъ пятиугольныхъ чиселъ есть $\frac{3xx-x}{2} = a$, а по умноженіи на 2 выйдетъ $3x^2 - x = 2a$, которое раздѣля на 3, будетъ $x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{2a}{3}$; откуда найдется $x = \frac{1}{6} \pm \sqrt{(\frac{2a}{3} + \frac{1}{36})} = \frac{1 \pm \sqrt{(24a+1)}}{6}$. Пусть будетъ $a = 35$, то найдется $x = \frac{1 \pm \sqrt{(840+1)}}{6} = \frac{1+29}{6} = 5$.

Задача V. Извѣстно m угольное число a, найти корень или число, составляющее онаго бокъ.

Рѣшен. По общему образцу, m угольное число будетъ $\frac{(m-2)xx-(m-4)x}{2} = a$, или $(m-2)x^2 - (m-4)x = 2a$, а по раздѣленіи на $m-2$ выйдетъ $x^2 - (\frac{m-4}{m-2})x = \frac{2a}{m-2}$, откуда найдется $x = \frac{m-4}{(m-2)2} \pm \sqrt{\frac{2a}{m-2} + (\frac{m-4}{2m-4})^2}$.

§ 194. *Опредѣлен.* Фигурныя числа разумѣются слѣдующимъ образомъ: (A)

Фигурныя числа.	постоянныя или 1 го порядка	1	1	1	1	1	1
	натуральн. или 2 го порядка	1	2	3	4	5	6
	треугольн. или 3 го порядка	1	3	6	10	15	21
	треугол. пирамидъ или 4го поряд.	1	4	10	20	35	56
	пятаго порядка - -	1	5	15	35	70	126
	шестаго порядка - -	1	6	21	56	126	252
	и прочая - -	1	7	28	84	210	462

изъ

изъ коихъ всякая горизонтальная строка изображаетъ тѣжъ самыя числа, какъ и сходственная ей перпендикулярная, и каждой членъ фигурныхъ чиселъ всякой строки есть сумма членовъ предъидущей строки, *на примѣръ*: третій членъ 6, третьяго порядка есть сумма трехъ первыхъ членовъ $1+2+3$ втораго порядка. Изъ сего удобно видѣть можно, что числа втораго порядка раждаются отъ сложенія единицъ; числа третьяго порядка произходятъ отъ непрерывнаго сложенія чиселъ второй строки, какъ-то $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ и проч.; числа четвертаго порядка составляются изъ чиселъ третьяго порядка, то есть $1+3=4$, $1+3+6=10$, $1+3+6+10=20$ и такъ далѣе.

§ 195. *Опредѣлен.* *Показатель порядка* есть число, означающее число горизонтальныхъ строкъ.

§ 196. *Теорема.* Сумма всѣхъ членовъ всякаго порядка горизонтальной строки, равна произведенію изъ послѣдующаго члена послѣдняго термина той же строки и числа членовъ, раздѣленному на показателя порядка.

Доказат. Для изслѣдованія сей истинны, возьмемъ въ разсужденіе пятой порядокъ горизонтальной строки; то сумма 4 хъ членовъ сей строки будетъ $=\frac{70\times4}{5}=56=1+5+15+35$, то есть, когда послѣдующій членъ 70 послѣдняго термина 35 умножится числомъ членовъ 4, а потомъ раздѣлится на показателя порядка

дка 5, то частное будетъ сумма 4 хъ членовъ пятаго порядка. Но дабы доказать оное вообще, то пусть буквы приложенной здѣсь таблицы B означать будутъ числа таблицы A; и для того положимъ, показатель $1 = e$ означаетъ первую горизонтальную строку, число членовъ $n = 4$, то будетъ $f + c + b$

a	b	c	f	g
h	i	l	m	k
p	s	r	q	t
u	x	y	z	v

(B)

$+ a = \frac{g.n}{e} = m$, $c + b + a = \frac{f.(n-1)}{e} = l$, $b + a = \frac{c.(n-2)}{e} = i$, $a = \frac{b.(n-3)}{e} = h$. $0 = \frac{a.(n-n)}{e} = 0$, посему $\frac{g.n}{e} + \frac{f.(n-1)}{e} + \frac{c.(n-2)}{e} + \frac{b.(n-3)}{e} + \frac{a(n-n)}{e} = m + l + i + h + 0$, или $\frac{n}{e}(g + f + c + b + a) - \frac{f}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = m + l + i + h + 0$: но $-\frac{f}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} =$

$$\left.\frac{\begin{matrix}-f-c-b-a\\ -c-b-a\\ -b-a\\ -a\end{matrix}}{e}\right\} = \frac{-m-l-i-h}{e};$$

также и $g + f + c + b + a = k$ (по свойству фигурныхъ чиселъ), по сему $\frac{k.n}{e} - (\frac{m+l+i+h}{e}) = m + l + i + h$, а по умноженіи на e будетъ $nk - 1.(m + l + i + h) = (m + l + i + h)e$, въ коемъ по переставкѣ членовъ выйдетъ $n.k = e(m + l + i + h) + 1.(m + l + i + h) = (e + 1).(m + l + i + h)$, а по раздѣленіи на $e + 1$, выйдетъ $\frac{n.k}{e+1} = m + l + i + h$; но какъ $e + 1 = 2$ есть показатель второй строки, k послѣдующій членъ послѣдняго термина

m

m той же строки, по сей причинѣ сумма членовЪ втораго порядка равна произведенію изЪ послѣдующаго члена послѣдняго термина и числа членовЪ, раздѣленному на показателя порядка.

ТакимЪ же образомЪ докажется и сумма членовЪ третьяго порядка; ибо вЪ семЪ случаѣ будетЪ $m + l + i + h = \frac{k.n}{e+1} = q$, $h + i + l = \frac{m.(n-1)}{e+1} = r$, $i + h = \frac{l.(n-2)}{e+1} = s$, $h = \frac{i.(n-3)}{e+1} = p$, $0 = \frac{h.(n-n)}{e+1} = 0$; по сему $\frac{k.n}{e+1} + \frac{m.(n-1)}{e+1} + \frac{l.(n-2)}{e+1} + \frac{i.(n-3)}{e+1} + \frac{h.(n-n)}{e+1} = q + r + s + p + 0$, или $\frac{n}{e+1} \times (k+m+l+i+h) - (\frac{m+2l+3i+nh}{e+1}) = q+r+s+p$; но $\frac{-m-2l-3i-nh}{e+1} =$

$$\left.\begin{array}{r} -m-l-i-h \\ -l-i-h \\ -i-h \\ -h \\ \hline e+1 \end{array}\right\} = \frac{-q-r-s-p}{e+1},$$

и $k+m+l+i+h = t$; по сему $\frac{n.t}{e+1} - (\frac{q+r+s+p}{e+r}) = q+r+s+p$, а по умноженіи чрезЪ $e+1$, будетЪ $n.t - (q+r+s+p) = (e+1).(q+r+s+p)$, вЪ коемЪ переставя члены, найдется $n.t = (e+1).(q+r+s+p) + 1.(q+r+s+p) = (e+2).(q+r+s+p)$, а по раздѣленіи на $e+2$ выйдетЪ $\frac{n.t}{e+2} = q+r+s+p = z =$ суммѣ членовЪ

новъ третьяго порядка, гдѣ показатель $e+2 = 3$ означаетъ третью горизонтальную строку. Такимъ же образомъ докажется помянутое свойство и прочихъ порядковъ.

Прибавленіе. Дабы найти сумму чиселъ какого нибудь порядка, положимъ число членовъ $= n$, сумма ихъ X, послѣдній членъ D, послѣдующій сего члена d, показатель порядка e: то по свойству предъидущаго предложенія будетъ $X = \frac{n.d}{e}$, и $X - D = \frac{D.(n-1)}{e}$, откуда найдется $X = \frac{D.(n-1)}{e} + D = \frac{Dn-D+eD}{e} = D.\frac{(n-1+e)}{e}$. И такъ положимъ, что $e=1$ означаетъ первой порядокъ, въ которомъ также и $D=1$, то будетъ $X = \frac{nD}{e} = \frac{n\,D}{1} = \frac{n}{1} =$ суммѣ членовъ перваго порядка. Теперь поставь $\frac{n}{1}$ въ общемъ образцѣ $X = D\,(\frac{n-1+e}{e})$ вмѣсто послѣдняго члена D втораго порядка, и 2 на мѣсто e, то выйдетъ $X = \frac{n}{1}.(\frac{n-1+2}{2}) = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} =$ суммѣ членовъ втораго порядка, или послѣдній членъ третьяго порядка, то есть треугольное число. Естьлижъ для изобрѣтенія суммы членовъ третьяго порядка поставится въ общемъ образцѣ $X = D.(\frac{n-1+e}{e})$ вмѣсто послѣдняго члена D количество $\frac{n}{1}.(\frac{n+1}{2})$ и 3 на мѣсто e, то сумма членовъ третьяго порядка, или послѣдній членъ четвертаго порядка будетъ $X = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$, которое будетъ

общимъ правиломъ для сыскиванiя чиселъ, составляющихъ треугольныя пирамиды.

Равнымъ образомъ найдется общее правило для познанiя суммы членовъ четвертаго порядка, или послѣдняго члена пятаго порядка $\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}$ и прочая.

Другое разположенiе предписанныхъ порядковъ или фигурныхъ чиселъ.

§ 197. Поелику перпендикулярныя строки фигурныхъ чиселъ представляютъ самыя тѣжъ числа, что и сходственныя горизонтальныя; слѣдственно на такихъ же свойствахъ и основанiе свое имѣютъ, то есть сумма всѣхъ членовъ всякой перпендикулярной строки равна произведенiю изъ послѣдующаго члена послѣдняго термина и числа членовъ, раздѣленному на показателя порядка. Итакъ ежели помянутыя фигурныя числа таблицы А разположатся такимъ образомъ, что всѣ перпендикулярныя строки

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

(C) останутся въ томъ же положенiи, а первой членъ третьяго порядка таблицы А поставится противъ втораго члена второй строки; первой членъ четвертаго порядка противъ втораго члена третьей строки, и такъ далѣе, то уже въ семъ случаѣ горизонтальныя строки не будутъ со-

согласны съ перпендикулярными, какъ въ первомъ разположенiи таблицы А *).

a	h				
b	i	p			
c	l	s	u		
f	m	r	x	t	
g	k	q	y	z	v

(D) Для общаго рѣшительнаго образца горизонтальной строки, или все равно, по разположенiю сей таблицы перпендикулярной строки h, i, l, m, k и проч. въ прежнемъ образцѣ найдено было, что сумма членовъ перваго порядка $a+b+c+f+g$ или послѣдующiй членъ k горизонтальной строки $=\frac{n}{1}$; сумма членовъ второй перпендикулярной строки $h+i+l+m+k=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}$, которая здѣсь не будетъ равна послѣднему члену q третьяго порядка: ибо число членовъ сего порядка не n, но $n-1$, и потому сей послѣднiй членъ равенъ суммѣ членовъ второй строки безъ послѣдняго k. И такъ дабы найти сумму членовъ второй строки безъ послѣдняго, то поставь въ общемъ образцѣ $X=\frac{Dn}{e}$ величину $\frac{n}{1}$ вмѣсто D, $n-1$ вмѣсто n, и 2 на мѣсто e, то будетъ $X=1\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}=$ суммѣ членовъ второй строки безъ послѣдняго k, или послѣднiй членъ q третьей строки. Послѣднiй членъ у четвертой перпендикулярной строки равенъ суммѣ членовъ третьей строки безъ послѣдняго q, и

---

*) Въ предложенной здѣсь таблицѣ каждая перпендикулярная строка изображена тѣмижъ самыми буквами, какими въ таблицѣ В означены горизонтальныя; слѣдовательно здѣсь число членовъ n означаетъ число перпендикулярныхъ строкъ, а показатель e число горизонтальныхъ.

и для того въ образцѣ $X = \frac{D.n}{e}$ поставъ $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ вмѣсто D, $n-2$ вмѣсто n, и 3 на мѣсто e, то сумма членовъ третьей строки безъ послѣдняго, или величина послѣдняго члена y, четвертаго порядка будетъ $X = \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$. Равнымъ образомъ найдется послѣдній членъ z пятаго порядка $= \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}$ и такъ далѣе. Но какъ n представляетъ произвольное число членовъ перваго порядка, по сей причинѣ величина всякой горизонтальной строки сего послѣдняго разположенія найдена быть можетъ.

§ 198 *Прибавлен*. Ежели величину $a+b$ возвысить во вторую, 3 ю, 4, 5 и проч. степень, и поставить сіи возвышенія одни подъ другія, то выйдетъ слѣдующая таблица: изъ разположенія которой видно, что предстоящія числа величинъ, въ сей таблицѣ поставленныхъ, продолжаются такимъ же порядкомъ, какъ

a	b				
a^2	$2ab$	b^2			
a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3		
a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	b^4	
a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5

и числа таблицы C. И такъ ежели показателя какой нибудь степени изобразимъ вообще буквою n, то предстоящее втораго члена какой нибудь горизонтальной строки будетъ $= \frac{n}{1}$, предстоящее третьяго члена той же строки будетъ $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$, предстоящее четвертаго члена

на $=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$, предстоящее пятаго $=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}$ и такъ далѣе. Буквы, изображающія какую нибудь горизонтальную строку, въ разсужденіи показателя подвержены слѣдующему закону: a^n, $a^{n-1}b$. $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$ и такъ далѣе; слѣдовательно всякая горизонтальная строка, изображающая какую нибудь степень, выразится чрезъ $a^n+\frac{n}{1}.a^{n-1}b+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^{n-2}b^2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$ и проч. и то же самое есть, что и въ § 62 показано было.

Задача I. Найти число ядеръ треугольной кучи ABCD, у которой бокъ основанія AB имѣетъ 7 ядеръ. *Чертежъ I. фигура 1 я.*

Рѣшен. Поелику каждое число четвертаго порядка фигурныхъ чиселъ изображаетъ число треугольныхъ пирамидъ, кои происходятъ отъ непрерывнаго сложенія треугольныхъ чиселъ; по сему сумма треугольныхъ чиселъ, изъ 7 ми членовъ состоящихъ, есть послѣдній, то есть седьмой членъ четвертаго порядка, или число. составляющее треугольную пирамиду, у которой бокъ основанія AB имѣетъ 7 ядеръ. И такъ положимъ число членовъ третьяго порядка $7=n$, искомое число ядеръ x, то по свойству треугольныхъ чиселъ, сумма ихъ или седьмой членъ четвертаго порядка, то есть требуемое число ядеръ, будетъ $x=\frac{n}{1}.(\frac{n+1}{2}).(\frac{n+2}{3})=(\frac{nn+n}{2})\times(\frac{n+2}{3})=(\frac{nn+n}{2})\frac{n}{3}+(\frac{nn+n}{2})\frac{2}{3}=\frac{nnn+3nn+2n}{6}$

$=$

$=\frac{343+147+14}{6}=\frac{504}{6}=84=$ числу ядеръ треугольной пирамиды.

Слѣдств. Поелику всякое треугольное число, то есть сумма прогрессіи, у которой разность $=1$, изображено быть должно вообще чрезъ $(n+1)\frac{n}{2}=\frac{nn+n}{2}$ (§ 193); изъ рѣшеніяжъ предъидущаго вопроса видно, что число ядеръ всякой треугольной пирамиды $=(\frac{nn+n}{2})\frac{n}{3}+(\frac{nn+n}{2})\frac{2}{3}=(\frac{nn+n}{2}).(\frac{n+2}{3})$, то изъ сего удобно разумѣть можно, что для сысканія числа ядеръ треугольной пирамиды, надлежитъ сперва найти треугольное число основанія, изъ ядеръ составленное, котораго бокъ есть число членовъ, а потомъ умножить оное чрезъ одну треть числа ядеръ, составляющихъ бокъ основанія, и къ сему произведенію придать двѣ трети треугольнаго основанія, изъ ядеръ составленнаго, то есть $(\frac{nn+n}{2})\frac{n}{3}+(\frac{nn+n}{2})\frac{2}{3}$ $=(\frac{49+7}{2}).\frac{7}{3}+(\frac{49+7}{2}).\frac{2}{3}=28\times\frac{7}{3}+28\times\frac{2}{3}=65\frac{1}{3}$ $+18\frac{2}{3}=84$. *).

Прибавлен. Дабы найти общее правило для изобрѣтенія по извѣстному числу членовъ суммы квадратныхъ чиселъ, или числа ядеръ четверо-

X 2

*) Или найдя число ядеръ треугольнаго основанія, потомъ придавъ 2 ядра къ числу ядеръ, бокъ основанія составляющихъ, умножь одною третью сей суммы число ядеръ треугольнаго основанія, будешь имѣть число ядеръ треугольной пирамиды.

тівероугольной пирамиды, у которой основаніе есть квадратъ; то прежде сего надлежитъ себѣ представить, что на треугольномъ сдѣланномъ изъ ядеръ основаніи, которое приставлено къ наклоненной плоскости CD (*Чертеж. I. фигура 2.*) сложена трехсторонная призма, у которой число ядеръ въ длинѣ AC однимъ ядромъ больше числа ядеръ бока AB, треугольнаго основанія ABE; но какъ число ядеръ сей призмы равно произведенію изъ треугольнаго числа ядеръ AEB и числа ядеръ содержащихся въ длинѣ бока AC, то положивъ число ядеръ бока AB $= n$, число ядеръ бока AC будетъ $= n + 1$, посему число ядеръ призмы ACDEB будетъ $= (\frac{nn+n}{2}) . (n+1) = \frac{nnn+2nn+n}{2}$. Теперь вообразимъ себѣ, что трехсторонная призма ACDEB раздѣлена плоскостію по линѣи EC, то отъ сего раздѣленія произойдутъ двѣ пирамиды,, изъ коихъ одна трехсторонная CDE, у которой основаніе есть треугольникъ изъ ядеръ составленный, находящейся у плоскости CD, а другая четверосторонная ACEB; но какъ по предъидущему слѣдствію число ядеръ треугольной пирамиды CDE $=$ $(\frac{nn+n}{2})\frac{n}{3} + (\frac{nn+n}{2})\frac{2}{3} = \frac{nnn+3nn+2n}{6}$, то вычтя сіе число ядеръ изъ числа ядеръ, составляющаго трехсторонную призму ACDEB, останется число ядеръ четверосторонной пирамиды ABEC, то есть $\frac{nnn+2nn+n}{2} - (\frac{nnn+3nn+n}{6}) = \frac{3nnn+6nn+3n}{6}$ $- (\frac{nnn+3nn+2n}{6}) = \frac{2nnn+3nn+n}{6} = (\frac{nn+n}{2})\frac{2n}{3}$ $+ (\frac{nn+n}{2})\frac{1}{3}$.

Изъ

Изъ сего явствуетъ, что для сысканія суммы квадратныхъ чиселъ, или числа ядеръ четверосторонной пирамиды, надлежитъ число ядеръ треугольника AEB, умножить чрезъ $\frac{2}{3}$ числа ядеръ, составляющаго бокъ AB или AE, а потомъ къ сему произведенію придать одну треть числа ядеръ треугольника AEB. Положимъ, бокъ AB основанія CBA четверосторонной пирамиды имѣетъ 5 ядеръ $=n$, то число всѣхъ ядеръ сей пирамиды будетъ $\left(\frac{nn+n}{2}\right)\frac{2n}{3}+\left(\frac{nn+n}{2}\right)\frac{1}{3}=\left(\frac{25+5}{2}\right)\frac{10}{3}$ $+\left(\frac{25+5}{2}\right)\frac{1}{3}=15\times\frac{10}{3}+15\times\frac{1}{3}=50+5=55.$

Слѣдств. Изъ сего удобно видѣть можно, что для изобрѣтенія числа ядеръ призматической пирамиды DABCGH (*Чертеж.* I. *фиг.* 3), должно сперва найти число ядеръ четверосторонной пирамиды ECBFG; потомъ найдя число ядеръ треугольника ADH, умножить оное разностїю числа ядеръ бока AB и BC, то есть числомъ ядеръ, составляющимъ бокъ AF наклоненной трехсторонной призмы ADEGF, коихъ общая сумма съ квадратною пирамидою будетъ равна числу ядеръ призматической пирамиды, у которой основанїе есть прямоугольникъ ABCD, изъ ядеръ составленной.

О уравненїяхъ вышнихъ степеней.

§ 199. **Опредѣлен.** *Уравненїе третьей степени* или *кубическое* есть то, въ которомъ неизвѣстная величина третьей степени; а *четвертой степени* или *биквадратное* есть то, въ коемъ неизвѣстная величина четвертой степени

пени, *на примѣръ*: кубическое $x^3+bx=cd$; четвертой степени $x^4-ax^2+bx=md$, и проч.

§ 200. *Опредѣлен.* Неизвѣстная величина именуется *корнемъ уравненія.*

§ 201. *Примѣчан.* Уравненіе всякой степени превратится въ о, когда всѣ члены второй части поставятся въ первую, *на примѣръ*: $x^2+dx=c-ax$ будетъ $x^2+dx+ax-c=0$; также $x^2-ax=bn$ превратится въ $x^2-ax-bn=0$.

§ 202. *Опредѣлен.* Полное кубическое или четвертой степени уравненіе есть то, въ которомъ сверьхъ большой степени неизвѣстной величины находятся другія всѣ нижней степени по порядку, *на примѣръ*: $x^3-bx^2+cx+d=0$, или $x^4-ax^3+bx^2-cx+d=0$ и прочая.

Теперь надлежитъ разсмотрѣть произхожденіе и свойство уравненій, начиная со второй степени по порядку и прочихъ степеней.

§ 203. Ежели два уравненія $x=2$, и $x=3$, превратя въ о, то есть $x-2=0$, и $x-3=0$, умножить одно чрезъ другое, то выйдетъ уравненіе $(x-2)\times(x-3)=0$, или $x^2-5x+6=0$, составленное изъ двухъ множителей, заключающее въ себѣ два корня $x=2$ и $x=3$. Ежели будетъ $x=a$, $x=b$, $x=c$, или $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, то умноживъ всѣ сіи три уравненія между собою, произойдетъ уравненіе $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$(A), составленное изъ трехъ множителей, и потому заключаетъ въ себѣ три корня. Когда возьмется четыре множителя

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, или $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, то отъ умноженія сихъ уравненій между собою произойдетъ уравненіе четвертой степени $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)=0$, или

$$\left.\begin{array}{llll} x^4-ax^3 & +abx^2 & -abcx & +abcd \\ -bx^3 & +acx^2 & -abdx & - \; - \\ -cx^3 & +bcx^2 & -acdx & - \; - \\ -dx^3 & +adx^2 & -bcdx & - \; - \\ & +bdx^2 & - \; - & - \; - \\ & +cdx^2 & - \; - & - \; - \end{array}\right\} = 0 \text{ (B)}.$$

Изъ сего и предъидущихъ уравненій видно: I) что всякое уравненіе столько имѣетъ корней, сколько въ уравненіи множителей заключается, или сколько показатель степени единицъ въ себѣ имѣетъ. II) Ежели вмѣсто неизвѣстной величины x поставится какая нибудь изъ извѣстныхъ, то сумма всѣхъ членовъ уравненія будетъ $=0$; ибо ежели въ первомъ множителѣ $x-a$ кубическаго уравненія A поставится a вмѣсто x, то будетъ $x-a=a-a=0$, и уравненіе изобразится такимъ образомъ: $0\times(x-b)\times(x-c)=0$. III) Во всякомъ уравненіи предстоящее втораго члена равно суммѣ всѣхъ корней съ противнымъ знакомъ; поелику корни уравненія A или B суть $x=c$, $x=b$, $x=c$ и проч. изъ коихъ каждой по переставкѣ членовъ превращенъ въ $x-a=0$, $x-b=0$ и проч. слѣдственно въ уравненіи A предстоящее втораго члена $-(a+b+c)=-a-b-c$. IV) Предстоящее третьяго члена равно суммѣ произведеній, изъ корней умноженныхъ по два. Естьли

же уравненіе будетъ большей степени, то предстоящее четвертаго члена будетъ равно суммѣ произведеній изъ корней, по три между собою умноженныхъ, съ противнымъ знакомъ; предстоящеежъ пятаго члена равно суммѣ произведеній изъ корней, умноженныхъ по четыре, и такъ далѣе; послѣдній же членъ всякаго уравненія равенъ произведенію всѣхъ корней.

И такъ ежели кубическое уравненіе A сравнимъ съ уравненіемъ $x^3-px^2+qx-r=0$, то найдется $p=a+b+c$, $q=ab+ac+bc$, $r=abc$; естьлижъ сравнится четвертой степени уравненіе B съ $x^4-px^3+qx^2-rx+t=0$, то найдется $p=a+b+c+d$, $q=ab+ac+bc+ad+bd+cd$, $r=abc+abd+acd+bcd$, $t=abcd$.

Изъ предписанныхъ уравненій удобно видѣть можно, ежели всѣ корни уравненія будутъ положительные, тогда знаки членовъ одинъ послѣ другаго перемѣняются съ $+$ на $-$ и съ $-$ на $+$, то есть столько перемѣнъ знаковъ будетъ въ уравненіи, сколько въ немъ заключается положительныхъ корней.

§ 204. Ежели три уравненія $x=2$, $x=-3$, $x=-5$, или $x-2=0$, $x+3=0$, $x+5=0$, умножатся между собою, то произойдетъ уравненіе $x^3+6x^2-x-30=0$, въ которомъ, какъ видно, заключается одна только перемѣна знаковъ втораго и третьяго членовъ, другъ за другомъ слѣдующихъ, и два повторенія одного и того же знака, одинъ послѣ другаго сряду поставленныхъ, какъ-то первой и второй члены

съ

съ знакомъ $+$, а третій и четвертой съ знакомъ $-$; поелику уравненіе заключаетъ въ себѣ одинъ корень положительной и два отрицательныхъ.

Изъ предписаннаго разумѣть можно, когда всѣ члены уравненія будутъ положительные, то всѣ корни онаго будутъ отрицательные; поелику они въ составленіи уравненія пріемлются съ противными знаками $+$, и для того отъ взаимнаго ихъ умноженія выходятъ всѣ члены уравненія положительные.

§ 205. Теперь пусть будутъ одни корни положительные а другіе отрицательные, какъ на примѣръ $x=a$, $x=-b$ и проч. или $x-a=0$, $x+b=0$ и проч., то изъ сихъ двухъ множителей составится слѣдующее уравненіе:

$$\left.\begin{matrix} xx - ax - ab \\ + bx \end{matrix}\right\} = 0,$$

въ которомъ ежели положимъ $a > b$, то первой членъ будетъ положительной, а два другіе отрицательные; по сему будетъ въ немъ одна только перемѣна знаковъ и одно повтореніе того же знака. Естьлижъ положимъ $a < b$, то два первые члена будутъ положительные, а третій отрицательной, и слѣдственно въ немъ также одна перемѣна знаковъ и одно повтореніе одного и того же знака послѣдуетъ. Ежели будетъ $a=b$, то произойдетъ уравненіе $xx \pm 0.x - ab = 0$, въ которомъ, какой бы изъ знаковъ, поставленныхъ предъ нулемъ, взятъ ни былъ, всегда будетъ одна перемѣна знаковъ, и одно повтореніе того же знака; слѣдовательно въ

предложенномъ уравненіи одинъ корень положительной, а другой отрицательной.

Положимъ еще два корня положительныхъ и одинъ отрицательной, *на примѣръ*: $x=a, x=b, x=-c$, или $x-a=0. x-b=0, x+c=0$, то отъ умноженія оныхъ между собою произойдетъ слѣдующее уравненіе:

$$\left.\begin{array}{l} x^3-ax^2+abx+abc \\ \quad -bx^2-acx\ -\ -\ - \\ \quad +cx^2-bcx\ -\ -\ - \end{array}\right\} = 0,$$

въ которомъ ежели положимъ, что $a+b>c$, то второй и третій члены будутъ отрицательные, по сему въ уравненіи будетъ двѣ перемѣны знаковъ, и одно повтореніе того же знака. Естьлижъ положимъ, что $a+b<c$, то второй членъ будетъ положительной, а третій отрицательной, въ которомъ уравненіи также будетъ двѣ перемѣны знаковъ и одно повтореніе того же знака. Наконецъ ежели $a+b=c$, то второй членъ будетъ $\pm 0.x^2$, а третій отрицательной, въ которомъ, какой бы знакъ втораго члена взятъ ни былъ, всегда будетъ двѣ перемѣны знаковъ и одно повтореніе того же знака послѣдуетъ; поелику въ уравненіи заключается два знака положительныхъ и одинъ отрицательной. Изъ сего вообще заключить можно, что во всякомъ уравненіи столько будетъ отрицательныхъ корней, сколько будетъ повтореній одинакихъ знаковъ, и столько положительныхъ, сколько будетъ перемѣнъ разныхъ знаковъ, одинъ послѣ другаго слѣдующихъ. Изъ тогожъ явствуетъ, ежели въ уравненіи не будетъ втораго члена, то въ немъ сумма положительныхъ корней

ней равна суммѣ отрицательныхъ, то есть $c = -(a+b)$, и проч.

Когда уравненіе не имѣетъ третьяго члена, то сумма произведеній изъ положительныхъ корней, соединенная съ отрицательными произведеніями, составляетъ 0; но ежели въ уравненіи не находится послѣдняго члена, то одинъ корень такого уравненія $= 0$; слѣдственно такое уравненіе можетъ быть раздѣлено на $x = 0$, какъ *на примѣръ*: уравненіе $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$ раздѣля на x, выйдетъ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Изъ вышеписанныхъ предложеній удобно видѣть можно, ежели всѣ корни будутъ отрицательные, то всѣ члены уравненія будутъ имѣть знакъ $+$; поелику уравненіе произойдетъ изъ нѣсколькихъ множителей, имѣющихъ предъ собою знакъ $+$. Послѣдній членъ уравненія всегда будетъ $+$, ежели число положительныхъ корней уравненія будетъ чотное; ибо чотное число знаковъ $-$, умноженныхъ между собою, производятъ $+$. Напротивъ того послѣдній членъ уравненія всегда будетъ $-$, ежели число положительныхъ корней будетъ не чотное; потому что не чотное число знаковъ $-$, умноженныхъ между собою, производятъ $-$.

Ежели въ уравненіи одинъ или болѣе изъ корней будетъ неизвлекомой, то оной долженъ быть дѣлитель послѣдняго члена; поелику сей членъ есть произведеніе всѣхъ корней уравненія.

Изъ сего явствуетъ, что для изобрѣтенія какого нибудь корня надлежитъ найти всѣхъ дѣлителей послѣдняго члена, изъ коихъ тотъ

имѣетъ

имѣетъ быть корнемъ уравненія, которой поставя на мѣсто x, данное уравненіе превратится въ o, или присоединя его къ x съ знакомъ $+$ или $-$, можетъ быть дѣлителемъ уравненія, *на примѣръ*: пусть будетъ уравненіе $x^3-3x^2-10x+24=0$, въ которомъ, какъ видно, двѣ перемѣны знаковъ и одно повтореніе того же знака, и слѣдственно заключается въ немъ два корня положительныхъ и одинъ отрицательной; дѣлителиж последняго члена 24 суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (§ 32). И такъ положимъ $x=1$, то предложенное уравненіе изобразится чрезъ $1-3-10+24=+12$, по сей причинѣ 1 корнемъ быть не можетъ; теперь положимъ $x=2$, то помянутое уравненіе превратится въ $8-12-20+24=0$; по сему корень сего уравненія $x=2$; слѣдовательно $x-2$ долженъ быть дѣлитель предложеннаго уравненія. И такъ раздѣля данное уравненіе $x^3-3x^2-10x+24$ на $x-2$, частное будетъ $x^2-x-12=0$, или $x^2-x=12$, изъ котораго по правиламъ второй степени уравненія найдется $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(12+\frac{1}{4})}=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{8}{2}=4$, и $x=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{6}{2}=-3$; и такъ найденные корни суть $x=2$, $x=4$ и $x=-3$, то есть два изъ нихъ дѣйствительные, и одинъ отрицательной.

Въ уравненіи $x^3=27$ или $x^3-27=0$ найдется $x=\sqrt[3]{27}=3$; но дабы найти прочіе корни, то раздѣли $x^3-27=0$ на $x-3$, частное будетъ $x^2+3x+9=0$, или $x^2+3x=-9$, откуда найдется $x=\frac{-3\pm\sqrt{-27}}{2}$; слѣдовательно

искомые

искомые три корня даннаго уравненія суть $x=3$, $x=\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}$, $x=\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}$, изъ коихъ одинъ дѣйствительной, а прочіе мнимые. Но дабы о семъ увѣриться, то умножь каждой корень изъ двухъ послѣднихъ кубично, выйдетъ I) $(\frac{-3+\sqrt{-27}}{2})\times(\frac{-3+\sqrt{-27}}{2})\times(\frac{-3+\sqrt{-27}}{2})$ $=\frac{54+162}{8}=\frac{216}{8}=27$. II) $(\frac{-3-\sqrt{-27}}{2})\times(\frac{-3-\sqrt{-27}}{2})$ $\times(\frac{-3-\sqrt{-27}}{2})=\frac{54+162}{2}=27$.

§ 206. *Наблюденіе.* При сыскиваніи корней надлежитъ быть предстоящему перваго члена $=1$, и чтобы прочіе члены никакихъ дробей не имѣли.

§ 207. *Задача.* Въ данномъ уравненіи уничтожить дроби.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3+\frac{a}{b}x^2+\frac{c}{d}x+\frac{e}{m}=0$. Положимъ неизвѣстная величина $x=\frac{y}{n}$ *), то данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{y^3}{n^3}+\frac{ay^2}{bn^2}+\frac{cy}{dn}+\frac{e}{m}=0$. Теперь умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ n^3, выйдетъ $y^3+\frac{na}{b}y^2+\frac{n^2cy}{d}+\frac{n^3e}{m}=0$, и такъ положимъ $n=bdm$, то изъ сего уравненія выйдетъ $y^3+admy^2+b^2m^2cdy+b^3d^3m^2e=0$ безъ дробей. Изъ чего видно, что количество n должно

*) Здѣсь n полагается такое число, которое бы на каждаго знаменателя изъ дробей, въ уравненіи заключающихся, безъ остатка дѣлиться могло.

жно быть равно произведенію изъ знаменателей всѣхъ дробей уравненія.

§ 208. *Задача.* Въ данномъ уравненіи уничтожить предстоящее перваго члена.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $ax^3+bx^2+cx+d=0$; раздѣли каждой членъ сего уравненія на предстоящее a перваго члена, будетъ $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{cx}{a}+\frac{d}{a}=0$; потомъ для уничтоженія дробей положи $x=\frac{y}{a}$, выйдетъ уравненіе $y^3+by^2+acy+a^2d=0$, въ которомъ первой членъ предстоящаго не имѣетъ.

§ 209. *Задача.* Къ корню уравненія придать данную величину e.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе x^3+ax^2-bx-m. Положимъ $x+e=y$, или $x=y-e$, по сему выйдетъ $x^3=y^3-3ey^2+3e^2y-e^3$, $ax^2=ay^2-2aey+ae^2$, $-bx=-by+be$ и $-m=-m$, коихъ сумма будетъ слѣдующая:

$$\left.\begin{array}{r} y^3-3ey^2+3e^2y-e^3 \\ ay^2-2aey+ae^2 \\ -by+be \\ -m \end{array}\right\}=0,$$

или $y^3+(a-3e)y^2-(2ae+b-3e^2)y-e^3+ae^2+be-m=0$. Положимъ $a=3$, $b=2$, $m=12$, и $e=2$, то выйдетъ слѣдующее уравненіе: $y^3-3y^2-2y-4=0$.

§ 210. *Прибавлен.* Для уменьшенія корней уравненія даннымъ количествомъ a надлежитъ только взять вмѣсто неизвѣстной буквы x, другую неизвѣстную y, сложенную съ количествомъ a; поелику поставя $y+a$ вмѣсто x, будетъ $y=x-a$.

§ 211. *Задача.* Корень даннаго уравненія умножить чрезъ a.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3-px^2+qx-r=0$, котораго корень должно умножить чрезъ a. Поставя вмѣсто x неизвѣстную величину $\frac{y}{a}$, будетъ $x=\frac{y}{a}$ или $ax=y$. Отъ чего взятое уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{y^3}{a^3}-\frac{py^2}{a^2}+\frac{qy}{a}-r=0$; а для уничтоженія дробей умножъ каждой членъ уравненія знаменателемъ a^3, выйдетъ $y^3-apy^2+a^2qy-a^3r=0$.

Примѣчан. Изъ сего явствуетъ, что корень x, умноженной чрезъ a, сыщется и не принимая вмѣсто x другой неизвѣстной величины, естьли только въ данномъ уравненіи умножится вторӧй членъ чрезъ a, третій чрезъ a^2, а четвертой членъ чрезъ a^3; ибо произойдетъ $x^3-apx^2+a^2qx-a^3r=0$ то же, что и въ произведенномъ уравненіи y^3-apy^2 и проч.

§ 212. *Задача.* Корень даннаго уравненія раздѣлить чрезъ a.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3-px^2+qx-r=0$. Поставя вмѣсто x величину ay, будетъ $ay=x$ или $y=\frac{x}{a}$, отъ чего данное уравненіе изобразится слѣдующимъ образомъ: $a^3y^3+a^2py^2+aqy-r=0$. Но дабы уничтожить предстоящее перваго члена, то раздѣли всѣ члены сего уравненія чрезъ a^3, будетъ $y^3-\frac{py^2}{a}+\frac{qy}{a^2}-\frac{r}{a^3}=0$. Изъ сего явствуетъ, что корень x, раздѣленной на a, сыщется и не принимая другой неизвѣстной буквы y вмѣсто x, естьли только въ данномъ уравненіи раздѣлится вто-

рой

рой членъ чрезъ a, третій чрезъ a^2, а четвертой чрезъ a^3; поелику произойдетъ уравненіе $x^3 - \frac{px^2}{a} + \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$ то же, что и въ предъидущемъ уравненіи.

§ 213. *Задача.* Данное уравненіе перемѣнить въ другое, такъ чтобы всѣ корни даннаго уравненія можно было вычесть изъ количества n.

Рѣшен. Пусть будетъ данное уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ Положимъ, что $n - x = y$, или $x = n - y$; то данное уравненіе представится въ другомъ видѣ, какъ слѣдуетъ:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = +n^3 - 3n^2y + 3ny^2 - y^3 \\ -px^2 = -n^2p + 2npy - py^2 \\ +qx = +qn - qy \\ -r = -r \end{array}\right\} = 0,$$

то есть $-y^3 + (3n - p)y^2 + (2np - 3n^2 - q)y + n^3 - n^2p + qn - r = 0$, или все равно $y^3 - (3n - p)y^2 - (2np - 3n^2 - q)y - n^3 + n^2p - qn + r = 0$; поелику во всякомъ уравненіи, которое $= 0$, сумма положительныхъ величинъ должна быть равна суммѣ отрицательныхъ.

§ 214 *Задача.* Данное уравненіе $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ перемѣнить въ другое, котораго бы корни могли быть корнями какой нибудь степени отъ данныхъ.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt{x} = y$ или $\sqrt[3]{x} = y$, при чемъ будетъ $x = y^2$, $x = y^3$. И такъ поставя первое изъ сихъ количествъ вмѣсто x, данное уравненіе въ первомъ случаѣ изобразится чрезъ $y^6 - py^4 + qy^2 - r = 0$; а во второмъ чрезъ $y^9 - py^6 + qy^3 - r = 0$.

Слѣд-

Слѣдств. Ежели должно будетъ уравненіе $y^6-py^4+qy^2-r=0$ обратить въ кубическое, то положа $y^2=z$, будешь имѣть уравненіе $z^3-pz^2+qz-r=0$.

§ 215. *Задача.* Данное уравненіе $x^3-px^2+qx-r=0$ обратить въ другое, котораго бы корни были средніе Геометрическіе между a и корнями даннаго уравненія.

Рѣшен. Положи $y=\sqrt{ax}$, или все равно $\frac{y^2}{a}=x$, то данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{y^6}{a^3}-\frac{py^4}{a^2}+\frac{qy^2}{a}-r=0$; потомъ умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ a^3, выйдетъ $y^6-apy^4+a^2qy^2-a^3r=0$. Но дабы сіе уравненіе обратить въ кубическое, то положа $y^2=z$ предъидущее уравненіе представится въ видѣ $z^3-apz^2+a^2qz-a^3r=0$.

§ 216. *Задача.* Данное уравненіе $x^3-px^2+qx-r=0$ превратить въ другое, котораго бы корень $y:n=1:x$ даннаго уравненія.

Рѣшен. Поелику $y:n=1:x$, то будетъ $xy=n$, или $x=\frac{n}{y}$. И такъ поставя $\frac{n}{y}$ вмѣсто x, данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{n^3}{y^3}-\frac{pn^2}{y^2}+\frac{qn}{y}-r=0$; умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ y^3, выйдетъ $n^3-pn^2y+qny^2-ry^3=0$, или все равно $ry^3-qny^2+pn^2y-n^3=0$; потомъ раздѣля каждой членъ сего уравненія чрезъ r, выйдетъ $y^3-\frac{qn}{r}.y^2$

$+\frac{pn^2}{r}y-\frac{n^3}{r}=0$, въ коемъ посредствомъ § 207 дроби легко уничтожить можно.

§ 217. *Задача.* Данное уравненіе $x^3+px^2+qx+r=0$ обратить въ другое, котораго бы корень содержался къ корню даннаго уравненія, какъ $a:b$.

Рѣшен. Поелику должна быть Геометрическая пропорція $a:b=y:x$, изъ которой найдется $x=\frac{by}{a}$; и такъ поставя сію величину вмѣсто x, данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{b^3y^3}{a^3}+\frac{pb^2y^2}{a^2}+\frac{qby}{a}+r=0$; раздѣли каждой членъ сего уравненія чрезъ $\frac{b^3}{a^3}$, выйдетъ $y^3+\frac{apy^2}{b}+\frac{a^2qy}{b^2}+\frac{a^3r}{b^3}$, въ которомъ дроби по § 207 уничтожены быть могутъ.

§ 218. *Задача.* Въ данномъ уравненіи сдѣлать предстоящее какого нибудь члена, которое бы на данное число дѣлиться могло.

Рѣшен. Пусть будетъ уравненіе $x^3-13x-55=0$, въ которомъ бы предстоящее втораго члена дѣлилось на 2, а послѣдній членъ на 3. Умноживъ сихъ дѣлителей между собою, то есть $2\times3=6$ положи $6x=y$ или $x=\frac{y}{6}$, то данное уравненіе изобразится такъ: $\frac{y^3}{216}-\frac{13y}{6}-55=0$; умножь каждой членъ сего уравненія чрезъ 216, выйдетъ $y^3-468y-11880=0$, въ которомъ предстоящее втораго члена на 2, а послѣдній членъ на 3 раздѣлены быть могутъ.

§ 219.

§ 219. *Задача.* Данное уравненіе $x^3 - nx^2 + px - q = 0$ превратить въ другое, въ которомъ бы предстоящее какого нибудь члена было произвольное, *на примѣръ* a.

Рѣшен. Положимъ $x = \frac{y}{z}$, то данное уравненіе посредствомъ предъидущихъ правилъ изобразится слѣдующимъ образомъ: $y^3 - nzy^2 + pz^2 y - qz^3 = 0$; теперь положимъ $nz = a$ или $z = \frac{a}{n}$ для втораго члена, которое поставя въ уравненіи $x = \frac{y}{z}$ вмѣсто z, найдется $x = \frac{ny}{a}$. Теперь поставь въ предъидущемъ уравненіи $\frac{a}{n}$ вмѣсто z, то выйдетъ уравненіе $y^3 - ay^2 + \frac{a^2 py}{n^2} - \frac{a^3 q}{n^3} = 0$, въ которомъ предстоящее втораго члена есть a, а прочія чрезъ a раздѣлены быть могутъ.

О различныхъ примѣрахъ третьей степени.

Задача I. Найти два числа, коихъ разность 12, и ежели произведеніе ихъ умножится на сумму чиселъ, то бы вышло 14560.

Рѣшен. Положимъ меньшое число $= x$, большое будетъ $x + 12$, коихъ произведеніе $x^2 + 12x$, умноживъ на $2x + 12$, произойдетъ $2x^3 + 36x^2 + 144x = 14560$, а по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$, или $x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 = 0$; но поелику послѣдній членъ такъ великъ, что вдругъ дѣлителей онаго познать не можно, которой, какъ видно, на куби-

бическое число 8 раздѣлиться можетъ (§ 81 Часть I), то положа $x=2y$, произойдетъ слѣдующее уравненіе: $8y^3+72y^2+144y-7280=0$, а по раздѣленіи на 8 выйдетъ $y^3+9y^2+18y-910=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7 и проч.; но какъ первые изъ нихъ дѣйствительно малы, то возьми $y=7$, отъ чего предъидущее уравненіе изобразится чрезъ слѣдующія числа: $343+441+126-910=0$, по сему первой корень $y=7$, а $x=14$. Но дабы найти прочіе корни, то раздѣли данное уравне- $x^3+18x^2+72x-7280$ на $x-14$, частное будетъ $x^2+32x+520=0$, или $x^2+32x=-520$, котораго квадратные корни $x=-16\pm\sqrt{-264}$ оба невозможные. И такъ будетъ первое искомое число $x=14$, второе $x+12=26$.

Задача II. Найти два числа, коихъ разность 64, и ежели квадратной корень большаго числа умножится на меньшое, то бы вышло 960.

Рѣшен. Пусть меньшое число $=x$, большое будетъ $x+64$. И такъ по условію вопроса выйдетъ слѣдующее уравненіе: $x\sqrt{(x+64)}=960=15.8.8$; теперь умножь каждую часть сего уравненія квадратно, выйдетъ $x^3+64x^2=\overline{15}^2.8^2.8^2$; положи $x=8y$, будетъ $8^3y^3+8^2.64y^2=\overline{15}^2.8^2.8^2$; раздѣли на 8^3, выйдетъ $y^3+8y^2=\overline{15}^2.8$; потомъ положи $y=2z$, выйдетъ уравненіе $8z^3+8.4z^2=\overline{15}^2.8$; раздѣли на 8, будетъ $z^3+4z^2=\overline{15}^2=225$, или $z^3+4z^2-225=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть

1,

1, 3, 5, и проч. и такЪ положа $z=5$, уравненіе изобразится чрезЪ слѣдующія числа: $125+100-225=0$, по сему $y=2z=10$, $x=8y=80$ = меньшому числу, а большое $x+64=144$, коего квадратной корень 12, умноженной на 80, производитЪ требуемое число 960.

Задача III. Найти три числа, коихЪ сумма $=23$, произведеніе изЪ перваго на второе, сложенное сЪ удвоеннымЪ третьимЪ $=60$, произведеніежЪ втораго и третьяго, сложенное сЪ утроеннымЪ первымЪ $=95$.

Рѣшен. ПоложимЪ первое число x, второе y, третье z, то по условію вопроса выйдутЪ три слѣдующія уравненія: I) $x+y+z=23$; II) $xy+2z=60$; III) $yz+3x=95$. ИзЪ перваго уравненія найдется $z=23-x-y$, изЪ втораго $z=\frac{60-xy}{2}$, изЪ третьяго $z=\frac{95-3x}{y}$; потомЪ составя изЪ сихЪ трехЪ равныхЪ количествЪ два уравненія $23-x-y=\frac{60-xy}{2}$ (A), $\frac{60-xy}{2}=\frac{95-3x}{y}$ (B); изЪ уравненія A найдется $x=\frac{14+2y}{y-2}$, изЪ B выйдетЪ $x=\frac{190-60y}{6-y^2}$, изЪ коихЪ составится уравненіе $\frac{190-60y}{6-y^2}=\frac{14+2y}{y-2}$; умножь каждую часть сперва на $y-2$, а потомЪ на $6-y^2$, выйдетЪ кубическое уравненіе $310y-60y^2-380=-2y^3-14y^2+12y+84$, вЪ коемЪ перенеся члены второй части вЪ первую, будетЪ $2y^3-46y^2+298y-464=0$, а по раздѣленіи на 2 выйдетЪ $y^3-23y^2+149y-232=0$, вЪ которомЪ дѣлителями послѣдняго члена суть, 1, 2, 4, 8,

и проч. И такъ положимъ $y=8$, то уравненіе будетъ $512-1472+1192-232=0$, откуда найдется $x=\frac{14+2y}{y-2}=\frac{14+16}{6}=5$, $z=23-x-y=23-13=10$.

Задача IV. Найти два числа, коихъ сумма $=7$, а разность ихъ кубовъ $=117$.

Рѣшен. Положимъ большое число x, меньшое будетъ $7-x$; и такъ по обстоятельствамъ вопроса будетъ $x^3-(7-x)^3=117$, или $x^3-343-21x^2+147x+x^3=117$, а по переставкѣ второй части въ первую выйдетъ $2x^3-21x^2+147x-460=0$, которое раздѣля на 2, будетъ $x^3-\frac{21xx}{2}+\frac{147x}{2}-230=0$. Теперь положа $x=\frac{z}{2}$, предъидущее уравненіе превратится въ слѣдующее: $z^3-21z^2+294z-1840=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8, 10, 16 и проч. Положимъ $z=10$, то уравненіе изобразится чрезъ $1000-2100+2940-1840=0$; по сему большое число $x=\frac{z}{2}=5$, а меньшое $7-x=7-5=2$, коихъ разность кубовъ $=125-8=117$. Но дабы найти прочіе корни, то раздѣли уравненіе $z^3-21z^2+294z-1840=0$ на $z-10$, частное $z^2-11z+184=0$, или $z^2-11z=-184$ будетъ уравненіе квадратное, котораго корни $z=\frac{11\pm\sqrt{-615}}{2}$ оба невозможные.

Задача V. Петръ имѣетъ у себя денегъ 8 ю рублями больше, нежели Александръ; но ежели общая сумма ихъ денегъ умножится на разность

ность кубовъ изъ чиселъ ихъ денегъ, то произведеніе будетъ 26624.

Рѣшен. Положимъ Александръ имѣетъ x рубл. то число Петровыхъ денегъ будетъ $x+8$, кубъ меньшаго числа x^3, большаго $(x+8)^3 = x^3+24x^2+192x+512$, разность ихъ $=24x^2+192x+512$, которая, будучи умножена на сумму чиселъ $2x+8=2(x+4)$, произведетъ $48x^3+576x^2+2560x+4096=26624$, или $48x^3+576x^2+2560x-22528=0$, а по раздѣленіи на 48 выйдетъ $x^3+12x^2+\frac{160x}{3}-\frac{1408}{3}=0$; положи $x=\frac{z}{3}$, то уравненіе превратится въ слѣдующее: $z^3+36z^2+480z-12672=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и проч. изъ коихъ 6 и 8 малы, когда же вмѣсто z возьмешь 12, то уравненіе превратится въ 0; по сему $x=\frac{z}{3}=\frac{12}{3}=4=$ числу Александровыхъ денегъ, $x+8=12=$ числу Петровыхъ денегъ. Но дабы найти прочіе корни, то раздѣли уравненіе $x^3+12x^2+\frac{160x}{3}-\frac{1408}{3}$ на $x-4$, частное будетъ $x^2+16x+\frac{352}{3}$, или $x^2+16x=-\frac{352}{3}$, откуда найдется $x=-8\pm\sqrt{-\frac{160}{3}}$, которые оба суть мнимые.

Задача VI. Нѣсколько купцовъ сложились торговать: каждой положилъ число рублей въ 10 разъ больше числа купцовъ; тѣми деньгами пріобрѣли барыша на всякіе 100 рубл. 6ю рублями больше, нежели число купцовъ; а послѣ

торгу нашлось, что весь прибытокъ составляетъ 392 рубли; спраш. число купцовъ.

Рѣшен. Положимъ число купцовъ x, каждой положилъ $10x$ рубл. а всѣ вмѣстѣ положили $10x^2$; но дабы найти ихъ прибытокъ, то сдѣлай слѣдующую пропорцію: $100 : x+6 = 10x^2 : \frac{10x^3+60x^2}{100} = \frac{x^3+6x^2}{10} =$ всему приторгу. И такъ $\frac{x^3+6x^2}{10} = 392$, или $x^3+6x^2-3920=0$. Положимъ теперь $x=2z$, то уравненіе по раздѣленіи на 8 превратится въ слѣдующее: $z^3+3z^2-490=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7, 10 и проч., изъ коихъ 2 и 5 будутъ малы, когда же положится $z=7$, то выйдетъ $343+147-490=0$; по сему $x=2z=14$ = числу купцовъ, изъ коихъ каждой положилъ $14\times10=140$ рубл.

Задача VII. Нѣсколько купцовъ вмѣстѣ положили въ торгъ 8240 рублей, потомъ къ сей суммѣ каждой прибавилъ число своихъ денегъ въ 40 разъ больше, нежели число всѣхъ товарищей; сею суммою пріобрѣли прибытка столько на 100 рубл. сколько купцовъ было; потомъ раздѣливъ сей прибытокъ нашлось, что каждой получилъ число рублей вдесятеро больше числа купцовъ, и еще за тѣмъ осталось 224 рубл. спращ. число купцовъ.

Рѣшен. Пусть число купцовъ было x, каждой положилъ къ общему капиталу $40x$ рубл. слѣдственно всѣ вмѣстѣ положили $40x^2$ рубл. по сему вся сумма была $40x^2+8240$ рубл., которою они на каждые 100 рубл. пріобрѣли x рубл.

рубл.; а чтобЪ найти количество всего прибытка, то сдѣлай слѣдующую пропорцію: $100 : x = 40x^2 + 8240 : \frac{40x^3 + 8240x}{100} = \frac{2x^3 + 412x}{5}$. Но какЪ каждой получилЪ изЪ прибытка $10x$ рубл. то всѣ вмѣстѣ взяли $10x^2$, и еще осталось 224 рубл. ИзЪ сего видно, что количество всего прибытка было $10x^2 + 224$; по сему $\frac{2x^3 + 412x}{5} = 10x^2 + 224$, а по умноженіи на 5, выйдетЪ $2x^3 + 412x = 50x^2 + 1120$, или $2x^3 - 50x^2 + 412x - 1120 = 0$, которое раздѣля на 2, будетЪ $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$, вЪ коемЪ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 и проч. изЪ коихЪ каждой долженЪ быть положительной; поелику вЪ уравненіи находится три перемѣны знаковЪ, слѣдственно всѣ три корня возможные. И такЪ положимЪ $x = 7$, то выйдетЪ $343 - 1225 + 1442 - 560 = 0$, по сему первой корень уравненія $x = 7$; но дабы найти прочіе корни уравненія, то раздѣли $x^3 - 25x^2 + 206x - 560$ на $x - 7$, частное будетЪ $x^2 - 18x + 80$, или $x^2 - 18x = -80$, откуда найдется $x = 9 \pm \sqrt{(81 - 80)} = 9 \pm 1$, слѣдственно два послѣднія корня $x = 8$, и $x = 10$. И такЪ на сей вопросЪ найдены три отвѣта: по первому рѣшенію число купцовЪ было 7, по второму 8, а по третьему 10, изЪ коихЪ каждое рѣшеніе покажетЪ одни и тѣжЪ самыя требуемыя обстоятельства вопроса.

Задача VIII. Дано число ядерЪ трехсторонной пирамиды 364, найти число ядерЪ вЪ боку основанія.

Рѣшен. Положимъ, бокъ основанія имѣетъ x ядеръ, то сумма всѣхъ ядеръ пирамиды будетъ $(\frac{x^2+x}{2})\frac{x}{3}+(\frac{x^2+x}{2})\frac{2}{3}=(\frac{x^2+x}{2})\times(\frac{x+2}{3})=\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ $=364$ (§ 198. Зад. I.), а по умноженіи на 6, выйдетъ $x^3+3x^2+2x=2184$, или $x^3+3x^2+2x-2184=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и проч. изъ коихъ 6 и 8 будутъ малы. И такъ положимъ $x=12$, то уравненіе будетъ $1728+432+24-2184=0$, слѣдственно число ядеръ основанія $=12$. Прочіежъ корни будутъ отрицательные; поелику въ уравненіи два раза одинакіе знаки одинъ за другимъ слѣдуютъ.

Задача IX. Дано число ядеръ квадратной пирамиды 204, найти число ядеръ, составляющее бокъ квадратнаго основанія пирамиды.

Рѣшен. Положимъ число ядеръ бока x, то сумма всѣхъ ядеръ квадратной пирамиды по (§ 198. Задач. I слѣдс.) будетъ $(\frac{x^2+x}{2})\frac{2x}{3}+(\frac{x^2+x}{2})\frac{1}{3}$ $=(\frac{x^2+x}{2})\times(\frac{2x+1}{3})=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}=204$, а по умноженіи на 6 выйдетъ $2x^3+3x^2+x=1224$, или $2x^3+3x^2+x-1224=0$; раздѣля на 2, выйдетъ $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-612=0$. Теперь положимъ $x=\frac{z}{2}$, то уравненіе по умноженіи на 8 превратится въ слѣдующее: $z^3+3z^2+2z-4896=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 и проч. изъ коихъ 8 и 12 малы. И такъ положимъ $z=16$, то уравненіе будетъ $4096+768+32-4896=0$; по сему $x=\frac{z}{2}=\frac{16}{2}=8$, прочіежъ корни будутъ отрицательные.

За-

Задача X. Въ призматической пирамидѣ дано число ядеръ 238, а число ядеръ въ длинѣ съ числомъ ядеръ въ ширинѣ основанія пирамиды сочтено 18, найти число ядеръ каждаго бока основанія.

Рѣшен. Послику когда сочтется число ядеръ въ длинѣ основанія особо, и число ядеръ въ ширинѣ особо, то сумма сихъ чиселъ будетъ однимъ ядромъ больше 18; потому что на углу лежащее ядро есть общее обоимъ рядамъ, и для того два раза въ счетъ пріемлется: и такъ положимъ, въ ширинѣ сочтено число ядеръ x, то въ длинѣ будетъ $19-x$; но какъ всякая призматическая пирамида составляется изъ квадратной пирамиды (у которой въ боку основанія положено x ядеръ) и трехсторонной наклоненной призмы (198. Зад. I. Прибавл), у которой въ длинѣ бока число ядеръ будетъ $19-2x$. Но число ядеръ квадратной пирамиды, по предъидущему предложенію $= \frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, а число ядеръ треугольной призмы $=(\frac{x^2+x}{2})\times(19-2x)$ $=\frac{-2x^3+17x^2+19x}{2}$, или $\frac{-6x^3+51x^2+57x}{6}$, коихъ общая сумма будетъ $=\frac{-4x^3+54x^2+58x}{6}$ или $\frac{-2x^3+27x^2+29x}{3}=238$, а по умноженіи чрезъ 3 выйдетъ $-2x^3+27x^2+29x=714$, въ коемъ переставя члены первой части во вторую, будетъ $2x^3-27x^2-29x+714=0$, а по раздѣленіи на 2, выйдетъ $x^3-\frac{27x^2}{2}-\frac{29x}{2}+357=0$. Теперь положи

$x = \frac{z}{2}$, то уравненіе по умноженіи на 8 превратится въ слѣдующее: $z^3 - 27z^2 - 58z + 2856 = 0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и проч. И такъ положимъ $z = 12$, то уравненіе выйдетъ $1728 - 3888 - 696 + 2856 = 0$; по сему $x = \frac{z}{2} = 6 =$ числу ядеръ въ ширинѣ, $19 - x = 19 - 6 = 13 =$ числу ядеръ въ длинѣ основанія, коихъ сумма безъ общаго ядра $19 - 1 = 18$. Дабы найти прочіе корни, то раздѣли $x^3 - \frac{27x^2}{2} - \frac{29x}{2} + 357$ на $x - 6$, частное будетъ $x^2 - \frac{15x}{2} - \frac{119}{2}$, или $x^2 - \frac{15x}{2} = \frac{119}{2}$, откуда найдется $x = \frac{15}{4} \pm \sqrt{(\frac{225}{16} + \frac{119}{2})} = \frac{15 \pm \sqrt{1177}}{4}$, изъ коихъ хотя одинъ корень и положительной, но неизвлекомой, заключающій въ себѣ цѣлое число съ дробью; но какъ часть ядра въ ряду пирамиды быть не можетъ, слѣдовательно оба сіи корни въ рѣшеніи мѣста имѣть не могутъ.

Примѣчан. Ежели въ кубическомъ уравненіи предстоящее перваго члена будетъ больше послѣдняго члена уравненія, то для разрѣшенія такого уравненія, найдя дѣлителей послѣдняго члена и дѣлителей перваго предстоящаго, изобрази ихъ дробьми, принявъ дѣлителей послѣдняго члена за числителей, а дѣлителей перваго члена за знаменателей; потомъ возьми вмѣсто неизвѣстной величины, такую дробь, которая естьли поставится вмѣсто неизвѣстной, то бы уравненіе превратилось въ нуль, *на примѣръ*: пусть будетъ уравненіе $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 6, а перваго предстоящаго суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; и такъ раздѣля каждаго изъ дѣлителей послѣдняго члена 6 на каждаго изъ дѣлителей перваго предстоящаго 24, произойдутъ слѣдующія дроби: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{6}{8}$, изъ коихъ когда вмѣсто неизвѣстной величины

чины возьмется $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, или $\frac{3}{4}$ съ знакомъ $+$, то уравненіе превратится въ нуль; по сему три искомые корня предложеннаго уравненія будутъ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

§ 220. *Задача XI.* Найти кубической корень величины $45+29\sqrt{2}$, у которой одна часть есть неизвлекомая.

Рѣшен. Положимъ $\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2})}=x+\sqrt{y}$, возвысь каждую часть сего уравненія въ третью степень, будетъ $45+29\sqrt{2}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$; но дабы уравнить части сихъ величинъ между собою, то положи $x^3+3xy=45$, $3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}=29\sqrt{2}$; потомъ умножь каждую часть изъ сихъ уравненій квадратно, выйдетъ I) $x^6+6x^4y+9x^2y^2=2025$, II) $9x^4y+6x^2y^2+y^3=1682$; вычти последнее уравненіе изъ перваго, останется $x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=343$, а по извлеченіи изъ обѣихъ частей кубическаго корня, выйдетъ $x^2-y=7$ или $x^2-7=y$; поставь сію величину въ уравненіи $x^3+3xy=45$ вмѣсто y, будетъ $x^3+3x^2-21x=45$, или $4x^3-21x-45=0$, которое раздѣля на 4, выйдетъ $x^3-\frac{21x}{4}-\frac{45}{4}=0$. Теперь положи $x=\frac{z}{2}$, то уравненіе изобразится чрезъ $z^3-21z-90=0$; но поелику дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 5, 6 и проч. то положа $z=6$, уравненіе будетъ $216-126-90=0$; по сему $x=\frac{z}{2}=\frac{6}{2}=3$, $x^2-7=y=9-7=2$; слѣдовательно кубической корень данной величины $x+\sqrt{y}=3+\sqrt{2}=\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2})}$. Для сысканія прочихъ корней раздѣли уравненіе z^3

$-21z-90$ на $z-6$, частное будетъ $z^2+6z+15=0$ или $z^2+6z=-15$, откуда найдется $z=-3\pm\sqrt{-6}$, по сему $x=\frac{z}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-6}}{2}$, $x^2=\frac{3\pm6\sqrt{-6}}{4}$ слѣдственно $x^2-7=\frac{-25\pm6\sqrt{-6}}{4}=y$; и такъ корни данной величины $\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2})}$ суть слѣдующіе: $3+\sqrt{2}$, $\frac{-3+\sqrt{-6}+\sqrt{(-25+6\sqrt{-6})}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{-6}+\sqrt{(-25-6\sqrt{-6})}}{2}$, изъ коихъ два послѣдніе суть невозможные.

§ 221. *Теорема.* Когда ни одинъ изъ дѣлителей послѣдняго члена корнемъ быть не можетъ, то корень сего уравненія есть неизвлекомой, то есть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью выразится не можетъ.

Доказательство. Положимъ, что въ уравненіи $x^3-px^2+qx-r=0$ дробь $\frac{ac}{bc}=\frac{b}{c}$ представляетъ корень онаго, которую поставя вмѣсто x, предложенное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{a^3c^3}{b^3c^3}-\frac{pa^2c^2}{b^2c^2}+\frac{qac}{bc}-r=0$, или $\frac{a^3}{b^3}=\frac{pa^2}{b^2}-\frac{qa}{b}+r$, а по умноженіи чрезъ b^2 выйдетъ $\frac{a^3}{b}=pa^2-qab+rb^2$; но $\frac{a^3}{b}$ есть дробь простая, а $pa^2-qab+rb^2$ цѣлое число; по сему дробь $\frac{a^3}{b}$ цѣлому числу равна быть не можетъ; слѣдовательно въ уравненіи $x^3-px^2+qx-r=0$ никакая дробь корнемъ быть не можетъ; цѣлоежъ число въ ономъ уравненіи также не можетъ

быть корнемъ по положенію, слѣдственно корень долженъ быть неизвлекомой.

Примѣчан. Дабы найти общій образецъ рѣшенія кубическихъ уравненій, коихъ корни или точно найти можно, или ни цѣлымъ числомъ, ни дробью изъявиться не могутъ, то надлежитъ прежде показать правило, какимъ образомъ уничтожается второй членъ полнаго кубическаго уравненія, а потомъ разсмотря свойство онаго, предложить общее правило, къ изъявленію кубическихъ корней служащее.

§ 222. *Задача* XII. Найти общее правило, для уничтоженія втораго члена всякаго уравненія.

Рѣшен. Пусть будетъ кубическое уравненіе $x^3-px^2+qx-r=0$. Положимъ теперь $x-z=y$, или $x=y+z$, то произойдетъ слѣдующее:

$$\left.\begin{array}{l} x^3=y^3+3zy^2+3z^2y+z^3 \\ -px^2=-py^2-2pzy-pz^2 \\ +qx= - \;\; - \;\; - \;\; qy+qz \\ -r= - \;\; - \;\; - \;\; -r \end{array}\right\}=0;$$

но дабы уничтожился второй членъ сего новаго уравненія, то должно быть $3zy^2-py^2=0$, и $3zy^2=py^2$, а по раздѣленіи на y^2 будетъ $3z=p$, откуда найдется $z=\frac{p}{3}$; слѣдовательно для уничтоженія втораго члена предложеннаго уравненія, надлежитъ къ y придать одну треть предстоящаго втораго члена съ противнымъ знакомъ, какъ здѣсь $x=y+\frac{1}{3}p$; поелику будетъ

$x^3=$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = y^3 + py^2 + \frac{p^2y}{3} + \frac{p^3}{27} \\ -px^2 = -py^2 - \frac{2p^2y}{3} - \frac{3}{27}p^3 \\ +qx = \quad - \quad + qy + \frac{1}{3}pq \\ -r = \quad - \quad - \quad - \quad - r \end{array}\right\} = 0,$$

то есть $x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + (-\frac{p}{3} + q)y - \frac{2p^3}{27} + \frac{1}{3}pq - r = 0$, которое втораго члена не имѣетъ.

Слѣдств. I. Изъ сего удобно можно видѣть, когда въ уравненіи $x^3 + px^2 +$ и проч. должно будетъ уничтожить второй членъ px^2, то надлежитъ положить $x = y - \frac{1}{3}p$. Также и для уничтоженія втораго члена въ уравненіи четвертой степени $x^4 \pm px^3 +$ и проч. слѣдуетъ полагать $x = y \mp \frac{1}{4}p$. *На примѣръ*, пусть будетъ кубическое уравненіе $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, то положа $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$, выйдетъ слѣдующее уравненіе $y^3 + 0 - 8y - 15 = 0$. Въ уравненіи $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$, положа $x = y - \frac{2}{4} = y - \frac{1}{2}$, выйдетъ уравненіе $y^4 - \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{67}{16} = 0$. Ежели уравненіе будетъ $z^5 + az^4 - bz^2 + cz + d = 0$, то второй членъ уничтожится, когда положится $z = x - \frac{a}{5}$, и такъ далѣе.

Слѣдств. II. Ежели и обратно должно будетъ уравненіе $x^3 - ax + b = 0$ превратить въ полное кубическое уравненіе, то положи $x = y + n$ будетъ

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = y^3 + 3y^2n + 3n^2y + n^3 \\ -ax = \quad - \quad - \quad -ay - an \\ +b = \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + b \end{array}\right\} = 0,$$

то есть $x^3 - ax + b = y^3 + 3y^2n + (3n^2 - a)y + n^3 - an + b = 0$.

§ 223.

§ 223. *Задача.* Уничтожить предпослѣдній членъ уравненія $x^4 + px^2 - qx + r = 0$, въ которомъ втораго члена не имѣется.

Рѣшен. Положи $x = \frac{r}{y}$, то данное уравненіе превратится въ слѣдующее: $\frac{r^4}{y^4} + \frac{pr^2}{y^2} - \frac{qr}{y} + r = 0$, а по умноженіи на y^4, будетъ $r^4 + pr^2y^2 - qry^3 + ry^4 = 0$, которое раздѣля на r, выйдетъ $y^4 - qry^3 + pry^2 + r^3 = 0$.

§ 224. *Задача.* Найти общее правило, посредствомъ котораго сыскиваются корни всякаго кубическаго уравненія.

Рѣшен. Дабы разсмотрѣть свойство уравненія $x^3 - 3ax - b = 0$ безъ втораго члена, и посредствомъ онаго опредѣлить общее правило кубическаго рѣшенія; то положимъ $x = n + m$, почему будетъ $x^3 = n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + m^3 = n^3 + 3mn \times (n + m) + m^3$, въ которомъ ежели вмѣсто $n + m$ поставится x, и всѣ члены перенесутся въ первую часть уравненія, то выйдетъ $x^3 - 3mnx - (m^3 + n^3) = 0$, коего корень x дѣйствительно $= n + m$. Теперь ежели сравнишь члены сего уравненія съ членами предложеннаго, то найдется $3mn = 3a$, или $mn = a$, и $m^3 + n^3 = b$ (A). Изъ уравненія $mn = a$ произойдетъ $m^3n^3 = a^3$, откуда найдется $m^3 = \frac{a^3}{n^3}$, и $n^3 = \frac{a^3}{m^3}$; изъ коихъ ежели въ уравненіи A поставится $\frac{a^3}{m^3}$ вмѣсто n^3, то выйдетъ $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$, а по умноженіи чрезъ m^3 и переставя величины будетъ $m^6 - bm^3 = -a^3$, въ которомъ по извлеченіи квадратныхъ корней вый-

детъ $m^3 = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}$; и наконецъ найдется $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}}$. Равнымъ образомъ когда въ уравненіи A вмѣсто m^3 поставится $\frac{a^3}{n^3}$, то выйдетъ $n^3 + \frac{a^3}{n^3} = b$, откуда найдется, какъ и прежде, $n = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}}$; по сему $x = m + n$ $= \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}}$ *).

Примѣчан. Ежели соображая общее правило кубическаго рѣшенія съ какимъ либо даннымъ уравненіемъ найдется, что $\frac{1}{4}b^2 > a^3$, то всегда одинъ корень будетъ дѣйствительной, а прочіе невозможные; также первые корни будутъ дѣйствительные, ежели будетъ $\frac{1}{4}b^2 = a^3$, или когда $\frac{1}{4}b^2 < a^3$, то есть когда количество $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - a^3)}$ будетъ или o или невозможное.

О рѣшеніи вопросовъ посредствомъ общаго кубическаго правила.

Задача I. Найти число, котораго кубъ равенъ искомому числу, шесть разъ взятому, сложенному съ 9 ю.

Рѣшен. Положимъ искомое число x, то по силѣ вопроса будетъ $x^3 = 6x + 9$, или $x^3 - 6x - 9 = 0$. И такъ ежели сравнить сіе уравненіе съ общимъ правиломъ рѣшенія, то найдется $3a = 6$, или

*) NB. Здѣсь одинъ квадратной корень означенъ +, а другой знакомъ — по той причинѣ, дабы было $mn = a$, или $m^3 \times n^3 = a^3$; ибо естьли оные означены будутъ одинакими знаками, то не выйдетъ сего произведенія. Изобрѣтеніе сего правила приписывается за нѣсколько уже сотъ лѣтъ Кардану или наипаче Сципіону Феррею.

или $a=2$, $b=9$, по сему $a^3=8$, $\frac{1}{4}b^2=\frac{81}{4}$ и $\frac{1}{4}b^2-a^3=\frac{81}{4}-8=\frac{49}{4}$; слѣдственно $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$, по сей причинѣ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}}=\sqrt[3]{(\frac{9}{2}+\frac{7}{2})}=\sqrt[3]{8}=2$. Слѣдовательно $x=\sqrt[3]{(\frac{9}{2}+\frac{7}{2})}+\sqrt[3]{(\frac{9}{2}-\frac{7}{2})}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3$, которое есть требуемое число.

Задача II. Найти такое число, котораго кубъ безъ утроеннаго искомаго числа равенъ 2мъ.

Рѣшен. Пусть искомое число будетъ x, то по свойству вопроса произойдетъ слѣдующее уравненіе: $x^3-3x=2$, или $x^3-3x-2=0$; сравни сіе уравненіе съ общимъ правиломъ кубическаго рѣшенія, то найдется $3a=3$, $a=1$, и $b=2$; по сему $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}b-\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-a^3)}}=\sqrt[3]{(1+0)}+\sqrt[3]{(1-0)}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=2$.

Задача III. Найти три числа непрерывной Ариѳметической пропорціи, у которой разность $d=3$, а произведеніе $p=28$.

Рѣшен. Пусть будетъ среднее число y, то большое число будетъ $y+d$, а меньшое $y-d$, произведеніе сихъ трехъ чиселъ будетъ $y^3-yd^2=p$, или $y^3-yd^2-p=0$. Ежели сіе уравненіе сравнить съ общимъ правиломъ кубическаго рѣшенія, то найдется $3a=d^2$ или $a=\frac{d^2}{3}$, и $p=b$. И такъ изобразя сіи величины числами, найдется y также, какъ и x (ибо одно вмѣсто другаго принять можно), то есть

$y=\sqrt[3]{14+\sqrt{(196-27)}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{(196-27)}}$
$=\sqrt[3]{(14+13)}+\sqrt[3]{(14-13)}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}$
$=3+1=4$; большое число $y+d=4+3=7$, а меньшое $y-d=4-3=1$, кои составятъ слѣдующую Ариѳметическую пропорцiю: ÷ 1, 4, 7.

Задача IV. Въ полномъ кубическомъ уравненiи $x^3-6x^2+11x-6=0$, найти корень x.

Рѣшен. Дабы въ семъ уравненiи найти неизвѣстную величину x, то сперва должно уничтожить второй членъ. И такъ положивъ $x=y+\frac{6}{3}=y+2$, данное уравненiе изобразится такимъ образомъ: $y^3-y=0$ (§ 222), или $y^3-1.y=0$. Теперь ежели сiе уравненiе сравнить съ общимъ правиломъ рѣшенiя, то найдется $3a=1$, $a=\frac{1}{3}$ и $b=0$; а изобразя чрезъ сiи числа общiй образъ рѣшенiя, выйдетъ $y=\sqrt[3]{\frac{0}{2}+\sqrt{(\frac{0}{4}-\frac{1}{27})}}+\sqrt[3]{\frac{0}{2}-\sqrt{(\frac{0}{4}-\frac{1}{27})}}=\sqrt[3]{\sqrt{(-\frac{1}{27})}}-\sqrt[3]{\sqrt{(-\frac{1}{27})}}=\sqrt[6]{(-\frac{1}{27})}-\sqrt[6]{(-\frac{1}{27})}=0$, по сему найденной корень $y=0$; но дабы найти прочiе корни, то раздѣли уравненiе y^3-y на y, частное будетъ y^2-1 или $y^2=1$, въ которомъ $\sqrt{y^2}=y=\pm 1$, слѣдовательно два послѣднiе корня суть $y=1$, $y=-1$, откуда найдется $x=y+2=0+2=2$, $x=y+2=1+2=3$, $x=y+2=-1+2=1$, изъ коихъ каждой корень есть положительной.

Примѣчан. Въ помянутомъ уравненiи y^3-y, корень y найти можно и не употребляя общаго правила; ибо раз-

разрѣшивъ оное на множителей, будетъ $y^3-y=y(y^2-1)$ $=y(y+1).(y-1)=0$, и ежели каждой множитель положится $=0$, то выйдетъ $y=0$, $y=-1$, $y=1$ тоже, что и прежде.

Задача V. Въ уравненіи $x^3+30x-117=0$, или $x^3=-30x+117$ найти величину x.

Рѣшен. Разсматривая общее правило кубическаго рѣшенія, найдется $3a=-30$, $a=-10$, $b=117$, а изобразивъ общее правило сими числами, выйдетъ $x=\sqrt[3]{\frac{117}{2}+\sqrt{(\frac{13689}{4}+\frac{4000}{4})}}$ $+\sqrt[3]{\frac{117}{2}-\sqrt{(\frac{13689}{4}+\frac{4000}{4})}}=\sqrt[3]{(\frac{117+133}{2})}$ $+\sqrt[3]{(\frac{117-133}{2})}=\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{8}$ $=5-2=3$; но дабы найти прочіе корни, то раздѣли уравненіе $x^3+30x-117$ на $x-3$. частное будетъ $x^2+3x+39$, или $x^2+3x=-39$, въ которомъ найдется $x=\frac{-3\pm\sqrt{-147}}{2}$, то есть оба послѣдніе корни суть невозможные.

Задача VI. Найти такое число, котораго кубъ равенъ шесть разъ взятому своему корню, сложенному съ 40 ю.

Рѣшен. По свойству вопроса уравненіе будетъ $x^3=6x+40$ или $x^3-6x-40=0$, въ коемъ $3a=6$, $a=2$, $b=40$. И такъ по общему рѣшенію найдется $x=\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}+\sqrt[3]{(20-}$ $\sqrt{392})=\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})}+\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})}$ $=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$ (§ 220).

Задача VII. Въ уравненіи $x^3-6x^2+13x-12$ $=0$ найти величину x.

Рѣшен. Дабы изъ даннаго уравненія исключить второй членъ, то положи $x-2=y$ или $x=y+2$, отъ чего данное уравненіе перемѣнится въ $y^3+y-2=0$, или $y^3=-1.y+2$. Ежели сравнимъ сіе уравненіе съ общимъ образцомъ рѣшенія (§ 224), то найдется $a=-\frac{1}{3}$, $b=2$, по сему $\frac{1}{4}b^2=1$, и $-a^3=\frac{1}{27}$. И такъ по общему правилу найдется $y=\sqrt[3]{}(1+\sqrt{\frac{28}{27}})+\sqrt[3]{}(1-\sqrt{\frac{28}{27}})$; но какъ $\sqrt{\frac{28}{27}}=\sqrt{\frac{28.3}{27.3}}=\frac{2\sqrt{21}}{9}=\frac{6\sqrt{21}}{27}$, по сему $y=\sqrt[3]{}(1+\frac{6\sqrt{21}}{27})+\sqrt[3]{}(1-\frac{6\sqrt{21}}{27})$ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{}(27+6\sqrt{21})+\frac{1}{3}\sqrt[3]{}(27-6\sqrt{21})$, откуда найдется, что кубической корень изъ $27\pm6\sqrt{21}$ дѣйствительно $=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, слѣдственно кубической корень изъ $27-6\sqrt{21}=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$; ибо кубъ корня $\frac{3+\sqrt{21}}{2}=\frac{216+48\sqrt{21}}{8}=27+6\sqrt{21}$, по сему $\frac{1}{3}(\frac{3+\sqrt{21}}{2})+\frac{1}{3}(\frac{3-\sqrt{21}}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$; по сему $x=y+2=1+2=3$. Но дабы найти другіе два корня, то раздѣли данное уравненіе $x^3-6x^2+13x-12$ на $x-3$, частное будетъ x^2-3x+4, или $x^2-3x=-4$, откуда найдется $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{}(\frac{9}{4}-\frac{16}{4})=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$, изъ чего видно, что оба послѣдніе корни суть невозможные.

Задача VIII. въ уравненіи $x^3+6x-36\sqrt{3}=0$, или $x^3=-6x+36\sqrt{3}$ найти величину x.

Рѣшен. Положи $x=y\sqrt{3}$, будетъ $x^3=3y^3\times\sqrt{3}$, $6x=6y\sqrt{3}$; по сему данное уравненіе пере-

ремѣнится въ $3y^3\sqrt{3}+6y\sqrt{3}-36\sqrt{3}=0$, а по раздѣленіи на $3\sqrt{3}$, выйдетъ $y^3+2y-12=0$. И такъ сравнивъ сіе уравненіе съ общимъ образцомъ кубическаго рѣшенія, найдется $3a=-2$, $a=-\frac{2}{3}$, $b=12$, а изобразя общее правило сими числами, найдется $y=\sqrt[3]{6+\sqrt{(36+\frac{8}{27})}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{(36+\frac{8}{27})}}=\sqrt[3]{(6+\sqrt{\frac{980}{27}})}+\sqrt[3]{(6-\sqrt{\frac{980}{27}})}=\sqrt[3]{(6+\sqrt{\frac{980.3}{27.3}})}+\sqrt[3]{(6-\sqrt{\frac{980.3}{27.3}})}=\sqrt[3]{(6+\frac{14\sqrt{15}}{9})}+\sqrt[3]{(6-\frac{14\sqrt{15}}{9})}=\sqrt[3]{(\frac{162+42\sqrt{15}}{27})}+\sqrt[3]{(\frac{162-42\sqrt{15}}{27})}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(162+42\sqrt{15})}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(162-42\sqrt{15})}=1+\frac{\sqrt{15}}{3}+1-\frac{\sqrt{15}}{3}=2$ (§ 220), по сему $x=y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

О Рѣшеніяхъ уравненій четвертой степени.

Задача I. Въ уравненіи $x^4=81$, или $x^4-81=0$ найти величину x.

Рѣшен. Извлеки корень четвертой степени изъ каждой части уравненія, будетъ $\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{81}=x=3$. Но дабы найти прочіе корни сего уравненія, то раздѣли уравненіе x^4-81 на $x-3$, частное будетъ $x^3+3x^2+9x+27=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 3, 9 и проч.; положи $x=-3$, то уравненіе изобразится чрезъ $-27+27-27+27=0$; потомъ раздѣли уравненіе $x^3+3x^2+9x+27$

на $x+3$, частное будетъ x^2+9 или $x^2=-9$, откуда найдется $x=\pm\sqrt{-9}=+3\sqrt{-1}=-3\sqrt{-1}$. И такъ въ данномъ уравненіи найдено четыре корня, изъ коихъ одинъ только дѣйствительной, а прочіе суть мнимые.

Примѣчан. Поелику x^4 есть квадратъ изъ x^2, по сей причинѣ гораздо удобнѣе можно найти всѣ четыре корня, когда только изъ x^4 извлечется сперва корень квадрата; а потомъ изъ найденнаго корня извлечется еще квадратной корень, какъ-то $\sqrt{x^4}=\sqrt{81}=x^2=\pm9$; и такъ когда $x^2=+9$, также $x^2=-9$, то изъ сего явствуетъ, что изъ перваго найдется два корня $x=+\sqrt{9}=3$ и $x=-3$, а изъ другаго $x=\pm\sqrt{-9}=3\sqrt{-1}$, $x=-3\sqrt{-1}$.

Задача II. Въ данномъ уравненіи $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ найти величину x.

Рѣшен. Поелику въ предложенномъ уравненіи находится двѣ перемѣны знаковъ $+$, $-$, и $-$, $+$ и два повторенія одного знака $+$, $+$ и $-$, $-$ другъ за другомъ слѣдующихъ; то изъ сего заключить можно, что сіе уравненіе имѣетъ два корня положительныхъ и два отрицательныхъ, изъ коихъ каждой долженъ быть дѣлителемъ послѣдняго члена (§ 205); дѣлителижъ послѣдняго члена 12 суть 1, 2, 3, 4, 6, 12; и такъ положа $x=+1$, данное уравненіе изобразится чрезъ $1+2-7-8+12=0$. Естьлижъ положить $x=-1$, то данное уравненіе въ нуль превращено быть не можетъ. Теперь положимъ $x=2$, то уравненіе начертано будетъ слѣдующими числами: $16+16-28-16+12=0$; однакожъ уравненіе не можетъ быть $=0$, когда возьмется $x=-2$; равнымъ образомъ естьли возьмется $x=3$, то уравненіе также не будетъ $=0$. Естьлижъ положимъ $x=-3$,

то

то уравненіе будетъ $81-54-63+24+12=0$; также найдется и четвертой корень $x=-4$. И такъ найденные четыре корня суть $x=1$, $x=2$, $x=-3$, $x=-4$, изъ коихъ два положительные и два отрицательные.

Задача III. Въ данномъ уравненіи $x^4+12x^3+48x^2+68x+15=0$ найти величину x.

Рѣшен. Поелику дѣлители послѣдняго члена суть 1, 3, 5, и всѣ корни онаго должны быть отрицательные, то положимъ $x=-3$, уравненіе выйдетъ $81-324+432-204+15=0$; но дабы найти прочіе корни, то раздѣли данное уравненіе на $x+3$, частное будетъ $x^3+9x^2+21x+5=0$, гдѣ $x=-5$; потомъ раздѣли кубическое уравненіе на $x+5$, частное будетъ $x^2+4x+1=0$ или $x^2+4x=-1$, откуда найдется $x=-2\pm\sqrt{3}$. И такъ искомые четыре корня суть $x=-3$, $x=-5$, $x=-2+\sqrt{3}$, $x=-2-\sqrt{3}$ всѣ отрицательные.

Пусть еще будетъ уравненіе $x^4-3x^3-8x^2-6x-20=0$, то положа $x=-2$, выйдетъ $16+24-32+12-20=0$; потомъ раздѣля данное уравненіе на $x+2$, частное будетъ $x^3-5x^2+2x-10=0$. Положа корень сего уравненія $x=5$, будетъ $125-125+10-10=0$; раздѣли кубическое уравненіе на $x-5$, частное будетъ $x^2+2=0$ или $x^2=-2$, откуда найдется $x=\pm\sqrt{-2}$; и такъ найденные четыре корня суть $x=5$, $x=-2$, $x=+\sqrt{-2}$, $x=-\sqrt{-2}$, изъ коихъ одинъ только положительной, а прочіе отрицательные.

§ 225 Ежели уравненіе будетъ слѣдующаго вида: $x^4+max^3+na^2x^2+ma^3x+a^4=0$, или

$x^4+mx^3+nx^2+mx+1=0$, въ которомъ предстоящiя неизвѣстныхъ величинъ отъ средины въ обѣ стороны идутъ въ одинакомъ порядкѣ, то оное представить можно изъ двухъ множителей $(x^2+pax+a^2)\times(x^2+qax+a^2)=0$, коихъ произведенiе будетъ $x^4+(p+q)ax^3+(pq+2)a^2x^2+(p+q)a^3x+a^4=0$. Сривнивъ сiе уравненiе съ предложеннымъ, найдется I) $p+q=m$, II) $pq+2=n$, изъ коихъ величину p и q опредѣлить должно; но какъ въ первомъ будетъ $q=m-p$, во второмъ $q=\frac{n-2}{p}$, то составя изъ сихъ равныхъ количествъ уравненiе $\frac{n-2}{p}=m-p$, умножь чрезъ p, выйдетъ $n-2=pm-p^2$, а переставя члены изъ одной части въ другую будетъ $p^2-mp=2-n$, откуда найдется $p=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-4n+8)}$, также и $q=m-p=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-4n+8)}$. Теперь въ первомъ изъ множителей $x^2+pax+a^2=0$, или $x^2+pax=-a^2$, найдется $x=-\frac{1}{2}ap\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2p^2-4a^2)}=-\frac{1}{2}ap\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(p^2-4)}$; во второмъ $x^2+qax+a^2=0$, или $x^2+qax=-a^2$, найдется $x=-\frac{1}{2}qa\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2q^2-4a^2)}=\frac{1}{2}aq\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(q^2-4)}$, чрезъ что найдутся всѣ четыре корня.

Для изъясненiя сего, пусть будетъ уравненiе $x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$, въ которомъ $a=1$, $m=-4$, $n=-3$, чрезъ что найдется $p=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-4n+8)}=-\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(16+12+8)}=-\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{-4+6}{2}=1$, $q=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-4n+8)}=-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{-4-6}{2}=-5$; по сей причинѣ будетъ

$x=$

$x = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 - 4)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - 4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, и $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(25-4)} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$; слѣдовательно четыре искомые корня будутъ слѣдующіе: I) $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. II) $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$; III) $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$, IV) $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$, изъ коихъ первые два невозможные, а послѣдніе дѣйствительные; поелику хотя число 21 и несовершенной квадратъ, однакожъ корень его можно изобразить безъ чувствительной погрѣшности десятичною дробью.

§ 226. Ежели уравненіе будетъ такого расположенія, $x^4 - max^3 + na^2x^2 - ma^3x + a^4 = 0$, въ которомъ всѣ тѣжъ числа, какъ и въ прежнемъ, но токмо при второмъ и четвертомъ членахъ, разные съ прежними знаки находятся; то представь себѣ, что сіе уравненіе состоитъ изъ двухъ множителей $(x^2 + apx - a^2).(x^2 + qax - a^2) = 0$, коихъ произведеніе будетъ $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)a^2x^2 - (p+q)a^3x + a^4 = 0$. Сравнивъ сіе уравненіе съ даннымъ, легко усмотрѣть можно, что $p + q = m$, $pq - 2 = n$ или $pq = n + 2$, изъ коихъ величину p и q найти слѣдуетъ; но какъ въ первомъ будетъ $q = m - p$, а во второмъ $q = \frac{n+2}{p}$, то будетъ $\frac{n+2}{p} = m - p$, а по умноженіи чрезъ p выйдетъ $n + 2 = pm - p^2$, или $p^2 - pm = -n - 2$, откуда найдется $p = \frac{m}{2} + \sqrt{(\frac{m^2}{4} - n - 2)} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)}$; но какъ $q = m - p$, по сему $q = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)}$. Теперь въ первомъ изъ множителей $x^2 + pax - a^2$, или $x^2 + pax = a^2$, найдется

дется $x = -\frac{1}{2}ap \pm \sqrt{(a^2 + \frac{p^2a^2}{4})} = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2 + p^2a^2)} = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2+4)}$ (§ 109); а во второмъ $x^2 + qax - a^2$ или $x^2 + qax = a^2$, найдется $x = -\frac{1}{2}aq \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2+4)}$; чрезъ что всѣ четыре корня изображены быть могутъ.

И такъ положимъ уравненіе $x^4 - 6x^3 + 24x + 16 = 0$, или $x^4 - 3.2x^3 + 3.8x + 16$, которое сравнивъ съ предписаннымъ, найдется $a = 2$, $m = -3$, $n = 0$; посредствомъ чего найдется $p = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)} = \frac{-3+1}{2} = -1$, $q = \frac{-3-1}{2} = -2$; по сему въ первомъ изъ множителей будетъ $x = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2+4)} = 1 \pm \sqrt{5}$, во второмъ $x = 2 \pm \sqrt{8}$. Изъ сего явствуетъ, что корни даннаго уравненія будутъ слѣдующіе: I) $x = 1 + \sqrt{5}$, II) $x = 2 + \sqrt{8}$, III) $x = 1 - \sqrt{5}$, IV) $x = 2 - \sqrt{8}$; изъ коихъ первые два дѣйствительные, а послѣдніе отрицательные; которые, будучи между собою умножены, произведутъ данное уравненіе.

Задача I. Въ данномъ уравненіи $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$, найти величину корня x.

Рѣшен. Сравнивъ данное уравненіе съ общимъ образцомъ рѣшенія, легко усмотрѣть можно, что здѣсь $m = -3$, $n = 2$, $a = 1$; посредствомъ чего найдется $p = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}$, $q = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 4n - 8)} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}$, откуда найдется $x = -\frac{1}{2}ap \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2+4)} = \frac{3 - \sqrt{-7} + \sqrt{(18 - 6\sqrt{-7})}}{4} = \frac{3 - \sqrt{-7} - \sqrt{(18 - 6\sqrt{-7})}}{4}$, $x = -\frac{1}{2}aq \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2+4)} = \frac{3 + \sqrt{-7} + \sqrt{(18 + 6\sqrt{-7})}}{4} =$

$\frac{3+\sqrt{-7}-\sqrt{(18+6\sqrt{-7})}}{4}$; по сему четыре искомые корня будутъ слѣдующїе: $x=\frac{3-\sqrt{-7}+\sqrt{(18-6\sqrt{-7})}}{4}$, $x=\frac{3-\sqrt{-7}-\sqrt{(18+6\sqrt{-7})}}{4}$, $x=\frac{3+\sqrt{-7}+\sqrt{(18+6\sqrt{-7})}}{4}$, $x=\frac{3+\sqrt{-7}-\sqrt{(18-6\sqrt{-7})}}{4}$.

О приведенїи уравненїй четвертой степени въ уравненїя третьей степени.

§ 227. *Задача.* Данное уравненїе $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, привесть въ кубическое уравненїе.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравненїе одинаково съ слѣдующимъ: $(x^2+\frac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0$, въ которомъ нужно найти только величину буквы p, q и r, посредствомъ коихъ сыщется потомъ и неизвѣстная величина x; возвысь каждую часть сего взятаго уравненїя во вторую степень, будетъ

$$\left.\begin{array}{l} x^4+ax^3+\frac{1}{4}a^2x^2+apx+p^2 \\ \quad +2px^2-2qrx-r^2 \\ \quad -q^2x^2 \end{array}\right\}=0,$$

которое сравнивъ съ даннымъ уравненїемъ, удобно усмотрѣть можно, что $\frac{1}{4}a^2+2p-q^2=b$, $ap-2qr=c$, $p^2-r^2=d$, изъ коихъ въ первомъ будетъ $\frac{1}{4}a^2+2p-b=q^2$, или $a^2+8p-4b=4q^2$, во второмъ $ap-c=2qr$, въ третьемъ $p^2-d=r^2$. Теперь ежели первое изъ сихъ уравненїй умножится третьимъ, а второе будетъ возвышено во вторую степень, то выйдутъ слѣдующїя уравненїя

нiя: I) $(a^2+8p-4b)(p^2-d)=4q^2r^2$, или $8p^3+(a^2-4b)p^2-8dp-d(a^2-4b)=4q^2r^2$, II) $(ap-c)^2=a^2p^2-2apc+c^2=4q^2r^2$; по сему $8p^3+(a^2-4b)p^2-8dp-d(a^2-4b)=a^2p^2-2acp+c^2$, а переставя величины второй части въ первую, выйдетъ $8p^3-4bp^2+(2ac-8d)p-a^2d+4bd-c^2=0$, въ которомъ чрезъ правила кубическихъ уравненiй найдется p; а по сей уже извѣстной величинѣ изъ уравненiя $\frac{1}{4}a^2+2p-b=q^2$ найдется $\pm q=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+2p-b)}$; равнымъ образомъ изъ уравненiя $ap-c=2qr$ сыщется $\frac{ap-c}{2q}=r$ или изъ третьяго уравненiя выйдетъ $r=\sqrt{(p^2-d)}$. Потомъ взявъ принятое уравненiе $(x^2+\frac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0$, перенеси изъ первой части во вторую $(qx+r)^2$, и извлекши изъ обѣихъ частей квадратные корни, выйдетъ $x^2+\frac{1}{2}ax+p=qx+r$, или все равно $x^2+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r$ (*), а переставя величины qx и p въ каждомъ изъ сихъ уравненiй, выйдетъ изъ перваго $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$, изъ втораго $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-p-r$, изъ коихъ въ каждомъ уравненiи найдется по два корня.

Дабы сiе правило изъяснить примѣромъ, то пусть предложено уравненiе $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$, которое сравнивъ съ общимъ образцомъ рѣшенiя, найдется $a=-10$, $b=35$, $c=-50$, $d=24$, изъ коихъ для изобрѣтенiя величины p произойдетъ уравненiе $8p^3-140p^2+808p-1540=0$, а по раздѣленiи на 4 выйдетъ $2p^3-35p^2+202p-385=0$, въ которомъ дѣлители

*) Величина $-qx$ прiемлется вмѣсто $+qx$ по той причинѣ, что $\sqrt{q^2}=\pm q$.

тели послѣдняго члена суть 1, 5, 7, 11 и проч. И такъ естьли положимъ $p=5$, то выйдетъ $250-875+1010-385=0$, слѣдственно $p=5$; а когда положимъ $p=7$, то будетъ $686-1715+1414-385=0$, по сему другой корень $p=7$; а для сысканія третьяго раздѣли уравненіе на 2, выйдетъ $p^3-\frac{35}{2}p^2+$ и проч. $=0$, въ которомъ предстоящее $\frac{35}{2}$ втораго члена равно суммѣ корней, по сему вычтя изъ $\frac{35}{2}$ сумму 12 двухъ первыхъ корней, остатокъ $\frac{11}{2}$ будетъ третій корень уравненія, изъ коихъ посредствомъ каждаго всѣ четыре корня предложеннаго уравненія изобрѣтены быть должны. И такъ положимъ сперва $p=5$, то будетъ $q=\sqrt{(25+10-35)}=0$, $r=\frac{-50+50}{0}=0$; но поелику чрезъ сіи уравненія найти ничего не можно, то возьми третье уравненіе изъ первыхъ $r^2=p^2-d=25-24=1$, по сему $r=1$; посредствомъ сего найдутся два первые корня; ибо въ первомъ уравненіи $x^2+(\frac{1}{2}a-q).x=r-p$ будетъ $x^2+(-\frac{10}{2}-0)x=1-5$, или $x^2-5x=-4$, откуда найдется $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{(\frac{25}{4}-4)}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5\pm3}{2}=4$, или $x=\frac{2}{2}=1$; а во второмъ $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-p-r$, выйдетъ $x^2+(-\frac{10}{2}+0)x=-5-1$, то есть $x^2-5x=-6$; откуда найдется $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{(\frac{25}{4}-6)}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=3$, или $x=\frac{4}{2}=2$. Тѣжъ самые корни выйдутъ, ежели положимъ $p=7$, или $p=\frac{11}{2}$: поелику когда возьмемъ сперва $p=7$, то будетъ $q=\sqrt{(25+14-35)}=2$, $r=\frac{-70+50}{4}=-5$, откуда произойдутъ

два

два квадратныя уравненїя: первое $x^2+(-\frac{10}{2}-2)x=-5-7$, или $x^2-7x=-12$, въ которомъ $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{7\pm1}{2}=4$, или $x=\frac{6}{2}=3$; второе $x^2+(-\frac{10}{2}+2)x=-7+5$, или $x^2-3x=-2$, гдѣ $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}-2)}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3\pm1}{2}=2$, или $x=1$, и такъ найденные четыре корня суть тѣжъ, какїе и прежде найдены были. Теперь ежели возьмемъ $p=\frac{11}{2}$, то также произойдутъ тѣ же самые корни; ибо тогда будетъ $q=\sqrt{(25+11-35)}=1$, и $r=\frac{-55+50}{2}=-\frac{5}{2}$, откуда произойдутъ два квадратныя уравненїя: первое $x^2+(-5-1)x=-\frac{5}{2}-\frac{11}{2}$, то есть $x^2-6x=-\frac{16}{2}=-8$, въ которомъ найдется $x=3\pm\sqrt{(9-8)}=3\pm1=4$, или $x=2$; второе, $x^2+(-5+1)x=-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}$, то есть $x^2-4x=-\frac{6}{2}=-3$, откуда найдется $x=2\pm\sqrt{(4-3)}=2\pm1=3$, или $x=1$, которые суть тѣжъ четыре корня, что и прежде.

Задача I. Въ уравненїи $x^4-2x^3-2x^2+18x-7=0$ посредствомъ предъидущаго предложенїя найти величину x.

Рѣшен. Ежели данное уравненїе сравнится съ предложеннымъ уравненїемъ въ § 227, то найдется $a=-2$, $b=-2$, $c=18$, $d=-7$. Но дабы найти величину p, то выйдетъ слѣдующее кубическое уравненїе: $8p^3+8p^2-16p-240=0$, а по раздѣленїи на 8, будетъ $p^3+p^2-2p-30=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 3, 5 и проч. И такъ естьли положимъ $p=3$, то уравненїе изобразится слѣдующими

щими числами: $27+9-6-30=0$, по сему первой корень $p=3$; потомъ по сей извѣстной величинѣ найдется $q=\sqrt{(1+6+2)}=\sqrt{9}=\pm 3$, $r=\frac{-6-18}{6}=-4$, посредствомъ чего найдутся всѣ четыре корня; ибо изъ уравненія $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$ выйдетъ $x^2-4x=-4-3=-7$, откуда найдется $x=2\pm\sqrt{-3}$, то есть $x=2+\sqrt{-3}$, $x=2-\sqrt{-3}$; а изъ уравненія $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-p-r$ будетъ $x^2+2x=-3+4=1$, откуда найдется $x=-1\pm\sqrt{2}$, то есть $x=-1+\sqrt{2}$, $x=-1-\sqrt{2}$.

Задача II. Въ данномъ уравненіи $x^4-16x-12=0$ найти величину x.

Рѣшен. Ежели данное уравненіе сравнится съ уравненіемъ § 227, то найдется $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$, по сему $8p^3-4bp^2+(2ac-8d)p-a^2d+4bd-c^2=0$, изобразится слѣдующими числами: $8p^3+96p-256=0$, а по раздѣленіи на 8 будетъ $p^3+12p-32=0$, въ которомъ дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8 и проч. изъ коихъ корень $p=2$, откуда найдется $q=\sqrt{4}=2$, $r=\frac{16}{4}=4$; по сему $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$ превратится въ $x^2-2x=2$, а отсюда сыщется $x=1\pm\sqrt{3}$, то есть $x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$, также изъ уравненія $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-p-r$ выйдетъ $x^2+2x=-6$, гдѣ $x=-1\pm\sqrt{-5}$, то есть $x=-1+\sqrt{-5}$, $x=-1-\sqrt{-5}$, изъ коихъ одинъ только первой корень положительной, а прочіе мнимые.

Задача III. Въ данномъ уравненіи $x^4-3x^2-4x-3=0$ найти величину x.

Рѣшен. Сравни данное уравненiе съ предложеннымъ въ § 227 уравненiемъ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, будетъ $a=0$, $b=-3$, $c=-4$, $d=-3$, чрезъ что уравненiе $8p^3-4bp^2+(2ac-8d)p-a^2d+4bd-c^2=0$ перемѣнится въ $8p^3+12p^2+24p+36-16=0$, или $8p^3+12p^2+24p+20=0$, а по раздѣленiи на 4 выйдетъ $2p^3+3p^2+6p+5=0$, въ коемъ дѣлители послѣдняго члена суть 1 и 5; и такъ естьли положимъ $p=-1$, то уравненiе превратится въ нуль; а потомъ посредствомъ сей величины найдется $q=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+2p-b)}=1$, $r=\frac{ap-c}{2q}=\frac{4}{2}=2$, по сему $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$ превратится въ $x^2-x=3$, а изъ $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-p-r$ выйдетъ $x^2+x=-1$, откуда найдется $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

Задача IV. Въ уравненiи $x^4-6x^3+12x^2-12x+4=0$ найти величину x.

Рѣшен. Ежели сiе уравненiе сравнится съ уравненiемъ § 227, то найдется $a=-6$, $b=12$, $c=-12$, $d=4$, по сему уравненiе $8p^3-4bp^2+(2ac-8d)p-a^2d+4bd-c^2=0$ перемѣнится въ $8p^3-48p^2+112p-96=0$, а по раздѣленiи на 8, выйдетъ $p^3-6p^2+14p-12=0$, гдѣ корень $p=2$, посредствомъ чего найдется $q=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+2p-b)}=\sqrt{(\frac{36}{4}+4-12)}=1$, $r=\frac{ap-c}{2q}=\frac{-12+12}{2}=0$; потомъ $x^2+(\frac{1}{2}a-q)x=r-p$, перемѣнится въ $x^2-4x=-2$, также изъ $x^2+(\frac{1}{2}a+q)x=-r-p$ выйдетъ $x^2-2x=-2$, откуда найдутся корни: I) $x=2+\sqrt{2}$, II) $x=2-\sqrt{2}$, III) $x=1+\sqrt{-1}$, IV) $x=1-\sqrt{-1}$.

При-

Прибавлен. Такимъ же образомъ найдутся корни и слѣдующихъ уравненій:

$$\text{I)}\ x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 4x + 2 = 0.$$

$$\text{II)}\ x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 14x - 6 = 0.$$

$$\text{III)}\ x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 58x + 35 = 0.$$

$$\text{IV)}\ x^4 + 6x^3 + x^2 - 54x - 90 = 0.$$

§ 228. *Задача.* Найти второе общее правило, къ разрѣшенію уравненій четвертой степени служащее.

Рѣшен. Положимъ корень уравненія четвертой степени $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ p, q и r означаютъ три корня кубическаго уравненія $z^3 - nz^2 + mz - h = 0$, въ которомъ будетъ $n = p + q + r$, $m = pq + qr + pr$, $h = pqr$ (§ 203). Теперь составь квадратъ изъ $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, получишь $x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, или $x^2 - n = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, возвысь еще каждую изъ сихъ частей во вторую степень, выйдетъ $x^4 - 2x^2n + n^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{q^2pr} + 8\sqrt{r^2pq}$; но $4pq + 4pr + 4qr = 4m$, по сему $x^4 - 2nx^2 + n^2 - 4m = (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) \times 8\sqrt{pqr}$, въ коемъ естьли вмѣсто pqr поставится h, а вмѣсто $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ напишется x, то выйдетъ $x^4 - 2nx^2 + n^2 - 4m = 8x\sqrt{h}$, или $x^4 - 2nx^2 - 8x\sqrt{h} + n^2 - 4m = 0$, котораго корень $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$. И такъ естьли данное уравненіе, *на примѣръ*, $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ сравнишь съ изобрѣтеннымъ уравненіемъ, то найдется $2n = a$, или $n = \frac{1}{2}a$, $8\sqrt{h} = b$, или $\sqrt{h} = \frac{b}{8}$, и $h = \frac{bb}{64}$, $n^2 - 4m = -c$, $4m = n^2 + c$, въ коемъ будетъ $m = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}c = \frac{1}{16}a^2$

$+\frac{1}{4}c$; а наконецъ по извѣстнымъ величинамъ n, m и h сыщутся всѣ три корня уравненія $z^3-nz^2+mz-h=0$, то есть $z=p$, $z=q$, $z=r$; потомъ по симъ извѣстнымъ количествамъ найдется величина $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

Дабы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть будетъ дано уравненіе $y^4-8y^3+14y^2+4y-8=0$, въ которомъ для уничтоженія втораго члена положи $y-\frac{8}{4}=x$, или $y=x+2$, то данное уравненіе превратится въ $x^4-10x^2-4x+8=0$ (§ 222 слѣдствіе I). Теперь сравнивъ сіе уравненіе съ предположеннымъ $x^4-ax^2-bx-c=0$, найдется $a=10$, $b=4$, $c=-8$, откуда найдется $h=\frac{1}{4}$, $n=5$, $m=\frac{17}{4}$, отъ чего уравненіе $z^3-nz^2+mz-h=0$ перемѣнится въ $z^3-5z^2+\frac{17}{4}z-\frac{1}{4}=0$, въ коемъ для исключенія дробей положивъ $z=\frac{u}{2}$, выйдетъ $u^3-10u^2+17u-2=0$, въ которомъ найдутся три корня $u=2$, $u=4+\sqrt{15}$, $u=4-\sqrt{15}$; потомъ найдется $z=p=\frac{u}{2}=1$, $z=q=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$, $z=r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$; откуда найдется $\sqrt{p^2}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{(8+2\sqrt{15})}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ *),

$\sqrt{r}$

---

*) Дабы найти корень квадрата изъ $8+2\sqrt{15}$, то положи $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{v}+\sqrt{y}$; потомъ умножь каждую изъ сихъ частей квадратно, будетъ $8+2\sqrt{15}=v+y+2\sqrt{vy}$. Теперь пусть будетъ $8=v+y$, и $2\sqrt{15}=2\sqrt{vy}$, или $\sqrt{15}=\sqrt{vy}$, изъ коихъ возвысивъ каждую часть во вторую степень, будетъ $15=vy$; и такъ изъ перваго уравненія найдется $y=8-v$, а изъ втораго $y=\frac{15}{v}$, по сему $\frac{15}{v}=8-v$, а по умноженіи на v выйдетъ $15=8v-v^2$, или все равно $v^2-8v=-15$, откуда найдется $v=4+\sqrt{1}=5$, и $y=8-v=8-5=3$; слѣдовательно $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{v}+\sqrt{y}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}{2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; но поелику $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$ есть количество положительное, то произведеніе четырехъ величинъ, изображающихъ x, должно быть положительное, по сему будетъ I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$, II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$, III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 \frac{+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$, IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$; но какъ $y = x + 2$, то искомые четыре корня будутъ слѣдующіе: I) $y = 3 + \sqrt{5}$, II) $y = 3 - \sqrt{5}$, III) $y = 1 + \sqrt{3}$, IV) $y = 1 - \sqrt{3}$.

О разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе.

§ 229 Сей способъ состоитъ въ томъ, когда уравненіе вышней степени совершенныхъ корней въ себѣ не заключаетъ, не смотря на то, можно ли будетъ ихъ изъявить коренными знаками или нѣтъ: тогда находятся оные корни, приближаясь къ точности дѣйствительнаго корня до тѣхъ поръ, пока погрѣшность за ничто почесться можетъ, о чемъ хотя въ § 101, 102, 103, 104 и 105 и говорено было, однакожъ предлагаемой здѣсь способъ несравненно удобнѣе прежнихъ.

И такъ когда извѣстно, что величина, изображающая корень какой нибудь степени, бу-

детъ на примѣръ больше 4 хъ, а меньше 5 ти, тогда полагается величина сего корня $=4+n$, гдѣ n дѣйствительно дробь; но поелику сiя дробь меньше 1, то квадратъ ея n^2 долженъ быть и еще меньше, а кубъ ея n^3 и слѣдующiя по немъ степени будутъ уже такъ малы, что ихъ изъ вычисленiя выпустить будетъ можно; ибо здѣсь ищется не самая величина n, но токмо ближайшая ей, слѣдовательно когда дроби n ближайшая величина изслѣдована будетъ, то изъ того уже корень $4+n$ сыщется несравненно дѣйствительнѣе.

§ 230 Дабы сiе показать вообще, то пусть будетъ уравненiе $x^2=a$, въ которомъ искомой корень больше n, а меньше $n+1$, и такъ положимъ $x=n+d$, гдѣ величина d означаетъ дробь, которую къ n придать должно, дабы получить требуемой корень еще ближе къ истинному; по сей причинѣ будетъ $x^2=n^2+2nd+d^2=a$, а изключивъ d^2, выйдетъ $n^2+2nd=a$, откуда найдется $d=\frac{a-nn}{2n}$, по сему $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{a+nn}{2n}$. Изъ сего удобно видѣть можно, когда n близко къ совершенному корню подходило, то $\frac{a+nn}{2n}$ будетъ еще ближе къ совершенству онаго. Естьлижъ сiю величину опять поставить вмѣсто n, то найдется величина, изображающая корень еще ближе къ истинному; а когда найденную такимъ образомъ величину поставить еще вмѣсто n, то требуемой корень выйдетъ несравненно ближе къ истинному, нежели предъидущей. И такъ положимъ

ложимъ на примѣръ: $x^2=a=3$, то найдется $n=1$, $x=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$. Теперь поставь 2 вмѣсто n, то выйдетъ $x=\frac{4+3}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ ближе перваго къ истинному корню; будежъ еще поставится $\frac{7}{4}$ вмѣсто n, то найдется $x=\frac{nn+a}{2n}=\frac{97}{56}=1\frac{41}{56}$ несравненнно дѣйствительнѣе предъидущаго; наконецъ поставь еще $\frac{97}{56}$ вмѣсто n, то выйдетъ $x=\frac{18817}{10864}=1\frac{7953}{10864}$, которая такъ близко къ $\sqrt{3}$ подходитъ, что квадратъ ея $x^2=\frac{354079489}{118026496}$ только дробью $\frac{1}{118026496}$ю больше 3хъ.

Примѣчан. Сей способъ изобрѣтенiя корней чрезъ приближенiе во всѣхъ уравненiяхъ съ равнымъ успѣхомъ употреблять можно, какъ-то изъ слѣдующихъ примѣровъ будетъ видно.

§ 231. Задача I. Въ данномъ уравненiи $x^3+ax^2+bx+c=0$ найти ближайщiй корень къ истинному.

Рѣшен. Дабы сiе прежде показать вообще, то пусть ближайщiй корень даннаго уравненiя будетъ n; и такъ положимъ $x=n-p$, по сему когда p должна быть дробь, то p^2 и прочiя высшей степени оной, изъ уравненiя безъ погрѣшности выпустить можно, по сему будетъ $x^3=n^3-3n^2p$, $x^2=n^2-2np$, изъ коихъ поставя первое вмѣсто x^3, а второе вмѣсто x^2 выйдетъ уравненiе $n^3-3n^2p+an^2-2anp+bn-bp+c=0$, или $n^3+an^2+bn+c=3n^2p+2anp+bp=(3n^2+2an+b)p$, откуда найдется

 $p=$

$p = \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3nn + 2an + b}$, по сему $x = n - (\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3nn + 2an + b})$ $= \frac{2n^3 + an^2 - c}{3nn + 2an + b}$, естьли сія величина поставится опять вмѣсто n, то выйдетъ такая величина, которую безъ всякой погрѣшности за истинной корень уравненія принять можно.

И такъ дабы сіе общее правило изъяснить примѣромъ, то пусть будетъ уравненіе $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, гдѣ $a = 2$. $b = 3$, $c = -50$; но поелику ближайшій корень сего уравненія $n = 3$, то найдется $x = \frac{2n^3 + 2n^2 + 50}{3nn + 4n + 3} = \frac{61}{21}$. Поставь сію дробь еще вмѣсто n, выйдетъ $x = \frac{536647}{184905} = 2\frac{166837}{184905}$, которое число гораздо ближе перваго къ искомому корню подходитъ, но естьли сія дробь поставится еще вмѣсто n, то найдется величина, несравненно ближе къ точному корню подходящая.

Задача II. Въ уравненіи $x^3 + 4x + 40 = 0$, найти ближайшій корень x.

Рѣшен. Сравнивъ общее уравненіе $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ съ даннымъ, найдется $a = 0$, $b = 4$, $c = 40$; и такъ ежели положимъ ближайшій корень $x = n - p$, то найдется $x = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3nn + 2an + b}$ $= \frac{2n^3 - 40}{3nn + 4}$; но поелику корень предложеннаго уравненія долженъ быть больше -3, а меньше -4, слѣдственно ежели положимъ $n = -3$, то выйдетъ $x = -\frac{94}{31} = -3\frac{1}{31}$, естьлижъ сія дробь поставится еще вмѣсто n, то найдется требуемой корень еще дѣйствительнѣе.

При-

Прибавлен. Такимъ же порядкомъ найдется корень уравненія $x^3+4x+8=0$.

Задача III. Въ уравненіи $x^5-6x-10=0$ найти ближайшій корень.

Рѣшен. Пусть будетъ ближайшій корень къ искомому $x=n$; но поелику изъ уравненія видно, что корень даннаго уравненія больше 1, а меньше 2 быть долженъ, то положимъ $x=n+p$ откуда найдется $x^5=n^5+5n^4p$, по сему $x^5-6x-10=n^5+5n^4p-6n-6p-10=0$, или $5n^4p-6p=6n+10-n^5$, откуда найдется $p=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$, по сему $x=n+p=\frac{4n^5+10}{5n^4-6}$. И такъ положимъ $n=1$, выйдетъ $x=\frac{14}{-1}=-14$, которая величина къ рѣшенію вопроса не годится; ибо ближайшая величина корню n взята очень мала; по сей причинѣ положимъ $n=2$, то выйдетъ $x=\frac{138}{74}=\frac{69}{37}$, которая дробь довольно уже близка къ истинному корню; но естьли дробь $\frac{69}{37}$ поставится еще вмѣсто n, то найдется величииа, несравненно ближе къ дѣйствительному корню подходящая.

О приведеніи уравненій вышнихъ степеней въ нижнія.

Поелику изъ первыхъ правилъ уравненія вышнихъ степеней видно, что всякое уравненіе меньшей степени удобнѣе рѣшено быть можетъ, нежели высшей степени; и такъ дабы не оставить и сего полезнаго предмета Алгебры, за необходимое почтено предложить здѣсь общія

 пра-

правила къ приведенію уравненій высшей степени въ уравненія нижней степени.

§ 232. *Задача I.* Уравненіе четвертой степени привесть въ два квадратныя, изъ коихъ бы одно было безъ втораго члена.

Рѣшен. Дабы сіе правило изъяснить вообще, то пусть будетъ уравненіе $x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$; теперь представь себѣ, что сіе уравненіе составлено изъ слѣдующихъ множителей: $(x^2+fx+g).(x^2+l)=0$ гдѣ f, g и l, найти слѣдуетъ, изъ коихъ по дѣйствительномъ умноженіи выйдетъ $x^4+fx^3+(g+l)x^2+flx+gl=0$, которое сравнивъ съ предположеннымъ, найдется $f=n$, $g+l=p$, $fl=q$, $gl=r$, откуда найдется $l=\frac{q}{n}$, $p=g+\frac{q}{n}$, $g=p-l=p-\frac{q}{n}$, также $g=\frac{r}{l}$, а по раздѣленіи r на $l=\frac{q}{n}$ частное будетъ $g=\frac{nr}{q}$; но поелику $g=p-l=\frac{r}{l}$, то по умноженіи обѣихъ частей на l, и по переставкѣ членовъ выйдетъ $l^2-pl=-r$, откуда найдется $l=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-r)}$; по сей причинѣ данное уравненіе разрѣшится на два слѣдующія: I) $x^2+fx+g=x^2+nx+p-\frac{q}{n}=0$, II) $x^2+l=x^2+\frac{q}{n}=0$.

И такъ дабы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть будетъ уравненіе $x^4+2x^3+3x^2+4x+2=0$, которое ежели сравнится съ общимъ уравненіемъ, то найдется $n=2$, $p=3$, $q=4$, $r=2$, а отсюда выйдетъ $g=p-\frac{q}{n}$

$=$

$=3-\frac{4}{2}=1$, также $g=\frac{nr}{q}=\frac{2.2}{4}=1$, $l=\frac{q}{n}=\frac{4}{2}=2$, или все равно $l=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-r)}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}-2)}$ $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$; по сему $x^2+nx+p-\frac{q}{n}=x^2+2x$ $+1=0$, также $x^2+\frac{q}{n}=x^2+2=0$; слѣдовательно данное уравненіе изобразится въ двухъ множителяхъ $(x^2+2x+1).(x^2+2)=0$, изъ коихъ произойдутъ два требуемыя уравненія: I) $x^2+2x+1=0$, или $x^2+2x=-1$, II) x^2+2 $=0$, или $x^2=-2$, откуда найдутся всѣ четыре корня даннаго уравненія, изъ перваго $x=-1\pm\sqrt{0}$, гдѣ оба корня $x=-1$, $x=-1$, а изъ втораго $x=\pm\sqrt{-2}$.

§ 233. *Задача II.* Уравненіе пятой степени $x^5+nx^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ привесть въ два уравненія, изъ коихъ бы одно было кубическое, а другое квадратное.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравненіе состоитъ изъ двухъ множителей $x^3+hx^2+lx+k=0$, и $x^2+g=0$, коихъ произведеніе будетъ $x^5+hx^4+(l+g)x^3+(k+gh)x^2+glx+gk$ $=0$. Теперь сравнивъ сіе уравненіе съ даннымъ, найдется $h=n$, $l+g=p$, $k+gh=q$, $gl=r$, gk $=s$, откуда сыщется $l=p-g=\frac{r}{g}$, а по умноженіи чрезъ g и по перестановкѣ членовъ, выйдетъ $g^2-pg=-r$, гдѣ найдется $g=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-r)}$; по сему второй множитель x^2+g перемѣнится въ $x^2+\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-r)}=0$: или принявъ въ разсужденіе другія величины, найдется $k=\frac{s}{g}$,

также $k=q-gn$, по сему $q-gn=\frac{s}{g}$, а по умноженiи чрезъ g, и по перестановкѣ членовъ будетъ $ng^2-qg=-s$, гдѣ раздѣля обѣ части на n, выйдетъ $g^2-\frac{q}{n}g=-\frac{s}{n}$, откуда найдется $g=\frac{q}{2n}\pm V(\frac{q^2}{4nn}-\frac{s}{n})=\frac{q\pm V(q^2-4ns)}{2n}$; по сему множитель x^2+g представится въ другомъ видѣ $x^2+\frac{q\pm V(q^2-4ns)}{2n}=0$. Но дабы найти втораго множителя, то положивъ для краткости $g=m$, уравненiе $x^3+hx^2+lx+k=0$ перемѣнится въ $x^3+nx^2+\frac{r}{m}x+\frac{s}{m}=0$; слѣдовательно данное уравненiе разрѣшено на два требуемыя уравненiя, изъ коихъ одно полное кубическое, а другое квадратное.

§ 234. *Задача III.* Уравненiе $x^5+nx^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ привесть въ два уравненiя, изъ коихъ бы одно было полное квадратное, а другое кубическое безъ втораго члена.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравненiе заключаетъ въ себѣ слѣдующихъ множителей: $x^2+fx+g=0$, $x^3+lx+k=0$, то произведенiе ихъ будетъ $x^5+fx^4+(l+g)x^3+(k+fl)x^2+(fk+gl)x+gk=0$. И такъ ежели сiе уравненiе сравнишь съ даннымъ, то найдется $f=n$, $l+g=p$, $k+fl=q$, $fk+gl=r$, $gk=s$, откуда сыщется $l=p-g$, $k=q-fl$, въ которомъ поставя n вмѣсто f, и $p-g$ вмѣсто l, выйдетъ $k=q-(p-g)n=q-np+gn$, а изъ уравненiя $gk=s$, най-

найдется $k=\frac{s}{g}$, по сему $q-np+gn=\frac{s}{g}$, а по умноженіи на g выйдетъ $ng^2-ngp+gq=s$, гдѣ раздѣля обѣ части на n, будетъ $g^2+(\frac{q}{n}-p)g=\frac{s}{n}$, откуда найдется $g=\frac{1}{2}p-\frac{q}{2n}\pm\sqrt{(\frac{q}{2n}-\frac{1}{2}p)^2+\frac{s}{n}}$; слѣдовательно уравненіе $x^2+fx+g=0$ перемѣнится въ $x^2+nx+\frac{1}{2}p-\frac{q}{2n}\pm\sqrt{(\frac{q}{2n}-\frac{1}{2}p)^2+\frac{s}{n}}$. Сего множителя можно представить и въ другомъ видѣ: понеже $k=q-fl=q-nl$, также изъ уравненія $fk+gl=r$, или $nk+gl=r$ выйдетъ $k=\frac{r-gl}{n}$, по сему $q-nl=\frac{r-gl}{n}$; но $l=p-g$, слѣдовательно естьли сія величина поставится въ предъидущемъ уравненіи вмѣсто l, то выйдетъ $q-np+ng=\frac{r-pg+g^2}{n}$, а по умноженіи чрезъ n, будетъ $qn-n^2p+n^2g=r-pg+g^2$, или $g^2-(p+n^2)g=nq-n^2p-r$, откуда найдется $g=\frac{p+nn}{2}\pm\sqrt{(\frac{p+nn}{2})^2+nq-n^2p-r}$, слѣдственно уравненіе $x^2+fx+g=0$ перемѣнится въ $x^2+nx+\frac{p+nn}{2}\pm\sqrt{(\frac{p+nn}{2})^2+nq-n^2p-r}=0$ (D). Равнымъ образомъ естьли вмѣсто g для краткости поставится m, то и другой множитель $x^3+lx+k=0$ перемѣнится въ $x^3+(p-m)x+\frac{s}{m}=0$. Теперь положимъ, что данное уравненіе одинаково съ уравненіемъ $x^5+ax^4-(a^2-ab)x^3+(a^2b-a^3)x^2+a^3b^2=0$ (B), гдѣ $a=n$, $ab-a^2=p$, $a^2b-a^3=q$, $r=0$, $a^3b^2=s$; и такъ еже-

ли

ли поставится въ уравненiи $x^2+nx+\frac{p}{2}-\frac{q}{2n}$ $\pm\sqrt{(\frac{p}{2}-\frac{q}{2n})^2+\frac{s}{n}}=0$ (A), или $x^2+nx=\frac{q}{2n}-\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p}{2}-\frac{q}{2n})^2+\frac{s}{n}}$ извѣстныя величины вмѣсто n, p и q, то найдется $\frac{p}{2}-\frac{q}{2n}=\frac{a^2+ab}{2}-(\frac{a^2+ab}{2})=0$, по сему и $(\frac{p}{2}-\frac{q}{2n})^2=0$, но поелику $s=a^3b^2$, то будетъ $\frac{s}{n}=\frac{a^3b^2}{a}=a^2b^2$, и $\sqrt{\frac{s}{n}}=\sqrt{a^2b^2}=ab$, отъ чего уравненiе A перемѣнится въ $x^2+ax+ab=0$, на которое раздѣля уравненiе B, частное будетъ $x^3-a^2x+a^2b=0$, слѣдовательно данное уравненiе раздѣлено на два требуемыя уравненiя. Тѣжъ самыя уравненiя произойдутъ, естьли извѣстныя величины поставятся въ уравненiи D вмѣсто n, p и q.

§ 235. *Задача* IV. Найти два уравненiя, одно чистое квадратное, а другое полное четвертой степени, на которыя бы уравненiе шестой степени $x^6+nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$ дѣлиться могло.

Рѣшен. Положимъ, что данное уравненiе составлено изъ слѣдующихъ множителей: $x^2+g=0$, и $x^4+hx^3+ix^2+kx+l=0$, коихъ произведенiе будетъ $x^6+hx^5+(g+i)x^4+(k+gh)x^3+(l+gi)x^2+gkx+gl=0$, которое сравнивъ съ даннымъ, найдется $h=n$, $i+g=p$, $k+gh=q$, $l+gi=r$, $gk=s$, $gl=t$, а отсюда сыщется $k=q-gh=q-ng=\frac{s}{g}$, а по умноженiи на g, выйдетъ $gq-ng^2=s$ или $ng^2-qg=-s$, а по раздѣле-

дѣленіи на n выйдетъ $g^2-\frac{q}{n}.g=-\frac{s}{n}$, гдѣ $g=\frac{q}{2n}$ $\pm\sqrt{(\frac{q^2}{4nn}-\frac{s}{n})}$, по сей причинѣ уравненіе x^2+g $=0$ перемѣнится въ $x^2+\frac{q}{2n}\pm\sqrt{(\frac{q^2}{4nn}-\frac{s}{n})}$; но поелику во всякомъ данномъ уравненіи извѣстныя буквы изображаются числами, слѣдственно ежели оное раздѣлится на сіе послѣднее уравненіе, то выйдетъ второе требуемое уравненіе, на которое равномѣрно данное уравненіе раздѣлиться можетъ.

§ 236. *Задача* V. Найти два уравненія, одно полное квадратное, а другое четвертой степени безъ втораго члена, на которыя бы уравненіе шестой степени $x^6+nx^5+px^4+qx^3$ $+rx^2+sx+t=0$ дѣлиться могло.

Рѣшен. Представь себѣ, что данное уравненіе состоитъ изъ двухъ множителей: x^2+fx $+g=0$ (A), и $x^4+ix^2+kx+l=0$(B), коихъ произведеніе будетъ

$$\left.\begin{array}{l} x^6+fx^5+gx^4+kx^3+lx^2+gkx+gl \\ \quad +ix^4+fix^3+gix^2+flx \\ \qquad\qquad +fkx^2 \end{array}\right\}=0,$$

которое ежели сравнишь съ даннымъ, то выйдетъ $f=n$, $g+i=p$, $k+fi=q$, $l+gi+fk=r$ (C), $gk+fl=s$ (D), $gl=t$, откуда найдется $i=p-g$, $k=q-fi$, а когда въ семъ уравненіи поставится n вмѣсто f, и $p-g$ вмѣсто i, то выйдетъ $k=q-np+ng$; потомъ поставя въ уравненіяхъ C и D вмѣсто f и i найденныя величины, выйдетъ изъ уравненія (C) $l=r-gp+g^2$ $-qn+n^2p-n^2g$, изъ (D) $l=\frac{s-qg+ngp-ng^2}{n}$, слѣдо-

довательно ежели сiи два равныя количества умножатся чрезъ n, то выйдетъ $ng^2-(n^3+np)g+n^3p+nr-qn^2=s-ng^2+(np-q)g$, а по переставкѣ членовъ будетъ $2ng^2-(n^3+2np-q)g=s-nr+qn^2-n^3p$, въ коемъ раздѣля обѣ части на $2n$ будетъ $g^2-(\frac{n^3+2np-q}{2n})g=\frac{s}{2n}\frac{-r+qn-nnp}{2}$, въ которомъ по правиламъ квадратныхъ уравненiй найдется g. И такъ естьли въ уравненiяхъ A и B на мѣсто неизвѣстныхъ величинъ f, g и проч. поставятся найденныя величины, то дѣйствительно выйдутъ такiя уравненiя, изъ коихъ на каждое, предложенное уравненiе $x^6+nx^5+px^4+$ и проч. раздѣлено быть можетъ.

§ 237. *Задача VI.* Уравненiе шестой степени $x^6+nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$ привесть въ два кубическiя, изъ коихъ бы одно было полное, а другое неполное.

Рѣшен. Представимъ себѣ, что данное уравненiе составлено изъ двухъ множителей $x^3+gx+h=0$, и $x^3+ix^2+kx+l=0$, коихъ произведенiе будетъ слѣдующее:

$$\left.\begin{array}{l} x^6+ix^5+kx^4+lx^3+hix^2+hkx+hl \\ \qquad\quad gx^4+gix^3+gkx^2+glx \;\; - \\ \qquad\qquad\quad hx^3 \;\; - \;\; - \;\; - \;\; - \end{array}\right\}=0,$$

которое сравнивъ съ даннымъ уравненiемъ, найдется $i=n$, $g+k=p$, $h+l+gi=q$, $hi+gk=r$, $hk+gl=s$, $hl=t$. Изъ сихъ уравненiй найдется g слѣдующимъ образомъ: $k=p-g$, $l=q-h-ng$, $k=\frac{r-nh}{g}$, $l=\frac{s-hk}{g}$, въ коемъ естьли вмѣсто k поставится $p-g$, то будетъ $l=\frac{s-ph+gh}{g}$, по

сему

сему $p-g=\frac{r-nh}{g}$, а по умноженіи на g выйдетъ $pg-g^2=r-nh$, въ коемъ найдется $h=\frac{g^2-pg+r}{n}$; также $q-h-ng=\frac{s-ph+gh}{g}$, а по умноженіи на g выйдетъ $qg-hg-ng^2=s-ph+gh$, или $-ng^2+qg-s=2hg-ph$, а по раздѣленіи на $2g-p$, выйдетъ $h=\frac{-ng^2+qg-s}{2g-p}=\frac{g^2-pg+r}{n}$, или $\left(\frac{ng^2-qg+s}{2g-p}\right)+\left(\frac{g^2-pg+r}{n}\right)=0$, а по умноженіи сей величины чрезъ $2g-p$ и чрезъ n, будетъ

$$\left.\begin{array}{l} 2g^3+n^2g^2-nqg+ns \\ \quad -3pg^2+2rg-pr \\ \qquad +p^2g \end{array}\right\}=0\ (A);$$

но поелику найдено $h=\frac{g^2-pg+r}{n}$, $h=\frac{t}{l}$, $l=q-h-ng$, въ которомъ естьли вмѣсто h поставится первое уравненіе, то выйдетъ $l=\frac{-g^2+pg-r}{n}+q-ng$, а по приведеніи въ дробь будетъ $l=\frac{-g^2+pg-r+qn-n^2g}{n}$. И такъ когда t раздѣлится на сію величину, и на мѣсто h поставится первое уравненіе, то выйдетъ $\frac{t}{l}=\frac{g^2-pg+r}{n}=\frac{nt}{-g^2+pg-r+qn-n^2g}$, откуда произойдетъ

$$\left.\begin{array}{l} g^4-2pg^3-n^2pg^2+n^2rg-nqr \\ \quad +n^2g^3+p^2g^2-2prg+r^2 \\ \qquad -nqg^2+npqg+n^2t \\ \qquad +2rg^2 \end{array}\right\}=0\ (B);$$

но дабы найти величину g, то можно сіе уравненіе привесть во вторую степень слѣдующимъ образомъ: умножь уравненіе B чрезъ 2, выйдетъ

$$\left.\begin{array}{l} 2g^4-4pg^3-2n^2pg^2+2n^2rg-2nqr \\ +2n^2g^3+2p^2g^2-4rpg+2r^2 \\ -2nqg^2+2npqg+2n^2t \\ +4rg^2 \;\;-\;-\;-\;- \end{array}\right\}=0\,(C);$$

потомъ умножь уравненiе A на g, выйдетъ

$$2g^4=\left\{\begin{array}{l} -n^2g^3+nqg^2-nsg \\ +3pg^3-2rg^2+prg \\ \;\;-\;\;\;-p^2g^2 \end{array}\right.$$

поставь сiю величину въ уравненiи C вмѣсто $2g^4$, произойдетъ

$$\left.\begin{array}{l} -pg^3-2n^2pg^2+2n^2rg-2nqr \\ n^2g^3+p^2g^2-3prg+2r^2 \\ -nqg^2+2npqg+2n^2t \\ +2rg^2-nsg\;\;-\;- \end{array}\right\}=0.$$

Теперь умножь сiе уравненiе на 2, выйдетъ

$$\left.\begin{array}{l} -2pg^3-4n^2pg^2+4n^2rg-4nqr \\ +2n^2g^3+2p^2g^2-6prg+4r^2 \\ -2nqg^2+4npqg+4n^2t \\ +4rg^2-2nsg\;\;-\;- \end{array}\right\}=0\,(D).$$

Умножь уравненiе A на $p-n^2$, получишь

$$-2pg^3+2n^2g^3=\left\{\begin{array}{l} +n^2pg^2-npqg+nps \\ -n^4g^2+n^3qg-n^3s \\ -3p^2g^2+2prg-p^2r \\ +3n^2pg^2-2n^2rg+n^2pr \\ \;-\;\;-\;+p^3g\;\;-\;\;- \\ \;-\;\;-\;-n^2p^2g\;\;-\;- \end{array}\right.$$

Наконецъ поставь сiю величину въ уравненiи D на мѣсто $-2pg^3+2n^2g^3$, то отъ сего произойдетъ уравненiе второй степени слѣдующее:

$$\left.\begin{array}{rrr} -p^2g^2 & -4prg & +4r^2 \\ -n^4g^2 & +3npqg & +4n^2t \\ +4rg^2 & +2n^2rg & -4rqn \\ -2nqg^2 & -2nsg & -p^2r \\ & +p^3g & +nps \\ & +n^3qg & +n^2pr \\ & -n^2p^2g & -n^3s \end{array}\right\} = 0$$

или

$$\left.\begin{array}{rrr} +p^2g^2 & +4prg & -4r^2 \\ +n^4g^2 & -3npqg & -4n^2t \\ -4rg^2 & -2n^2rg & +4rqn \\ +2nqg^2 & +2nsg & +p^2r \\ & -p^3g & -nps \\ & -n^3qg & -n^2pr \\ & +n^2p^2g & +n^3s \end{array}\right\} = 0,$$

откуда найдется величина g; потомъ посредствомъ сей извѣстной величины найдутся всѣ неизвѣстныя величины h, i, k и l двухъ множителей; наконецъ когда вмѣсто оныхъ въ помянутыхъ множителяхъ поставятся извѣстные, то данное уравненіе представится въ двухъ требуемыхъ множителяхъ.

Примѣчаніе. Посредствомъ сихъ предложеній всякое уравненіе высшей степени, какъ-то седьмой, восьмой и проч. легко можно привесть въ нижнія уравненія.

КОНЕЦЪ АЛГЕБРЫ.



О ПРЕДЛОЖЕНІЯХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ.

Теорема. I. Квадратъ діогонали AB прямоугольнаго треугольника ABC равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ боковъ AC и BC. (*Чертеж. I. фигура* 4).

Доказательство. Изъ точки B бокомъ BC опиши кругъ; продолжи AB до D; точки E и C, также C и D соедини прямыми линѣями EC и CD, будетъ $\triangle$AEC подобенъ $\triangle$ACD (*Часть II.* 185). И такъ положивъ AC$=a$, BC$=b$, AB$=x$, будетъ AE$=$AB$-$(BC)BE$=x-b$, AD$=$AB$+$BD$=b+x$, и для подобныхъ треугольниковъ AEC и ACD, будетъ AE : AC $=$AC : AD, то есть $x-b : a = a : x+b$ (*Часть II.* § 104), при чемъ $a^2=(x+b).(x-b)=x^2-b^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $a^2+b^2=x^2$, то есть $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$.

Слѣдствіе. Поелику $a^2=(x+b).(x-b)$, по сему $\sqrt{a^2}=a=\sqrt{(x+b).(x-b)}=$AC. Изъ сего явствуетъ, что квадратъ какого нибудь бока изъ составляющихъ прямой уголъ равенъ произведенію изъ суммы и разности двухъ другихъ боковъ; слѣдовательно для сысканія по извѣстной діогонали AB и перпендикуляру BC, другаго бока AC, надлежитъ только сумму боковъ AB $+$ BC умножить разностію тѣхъ же боковъ AB$-$BC, тогда квадратной корень сего произведенія будетъ равенъ боку AC.

До-

Доказательство той же теоремы Геометрически (фигура 5).

Чрезъ точку C проведи линѣю FD параллельно AB; сдѣлай CD=BC; изъ точки D и чрезъ точку A проведи линѣи DL и FH параллельно BC и равны DF; точки H и L соедини прямою линѣею HL, то произшедшiй отъ сего четвероугольникъ DFHL будетъ квадратъ; потомъ продолжи CB и AB до K и E; сдѣлай HI и GL=CD или BC и проведи AI, IG и GC, отъ чего произойдетъ четыре равныхъ прямоугольныхъ треугольника AFC, AHI, ILG и GDC, изъ коихъ каждой равенъ половинѣ прямоугольника FB или BL, по сему AFC+AHI+ILG+GDC=FB+BL. Но какъ изъ начертанiя видно, что ACGI есть квадратъ изъ дiогонали AC; ибо въ равныхъ треугольникахъ AFC и AHI уголъ FCA =HAI, по сему уголъ ACF+FAC=HAI+FAC =90 град. слѣдовательно уголъ CAI=90 град. (*Часть II.* § 16). Такимъ же образомъ докажется, что и уголъ AIG=IGC=GCA=90°. Также доказать не трудно, что BCDE есть квадратъ изъ линѣй BC и ABKH есть квадратъ изъ линѣи AB; но поелику FDLH или $\overline{FD}^2$ = ACGI+AFC+AHI + ILG + GDC = BCDE + ABKH+FB+BL; слѣдовательно когда изъ сихъ равныхъ количествъ вычтутся равныяжъ количества AFC+AHI+ILG+GDC и FB+BL, то останется ACGI=BCDE+ABKH, то есть $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$.

Теорема. II. Во всякомъ треугольникѣ ABC, у котораго перпендикуляръ CD падаетъ на осно-

 осно-

основанiе внутри треугольника, будетъ прямоугольникъ изъ суммы и разности боковъ AC и BC равенъ прямоугольнику изъ основанiя AB и разности между двухъ отрѣзковъ AD и BD (фигура 6).

Доказател. Положимъ $AC=a$, $BC=b$, $DB=DF=c$, $AD=d$. Для прямоугольныхъ треугольниковъ ADC и DBC будетъ $a^2-d^2=\overline{DC}^2$, также $b^2-c^2=\overline{DC}^2$, по сему $a^2-d^2=b^2-c^2$, а по переставкѣ величинъ выйдетъ $a^2-b^2=d^2-c^2$; но $a^2-b^2=(a+b).(a-b)$, и $d^2-c^2=(d+c)\times(d-c)$; слѣдовательно $(a+b).(a-b)=(d+c)\times(d-c)$; но $d+c=AB$ и $d-c=AD-(DB)DF=AF$, по сему $(AC+BC)\times(AC-BC)=AB\times(AD-DB)$.

Слѣдств. Ежели сдѣлать $AF=BD$ и основанiе AB раздѣлить на двѣ равныя части въ точкѣ E (фигура 7), то будетъ $AD-BD$ или $AD-AF=FD=2ED$; по сей причинѣ выйдетъ $(a+b).(a-b)=AB\times 2ED$, то есть прямоугольникъ изъ суммы и разности боковъ AC и BC равенъ прямоугольнику изъ цѣлаго основанiя AB и дважды взятаго разстоянiя между перпендикуляромъ CD и срединою E основанiя AB.

Теорема III. Во всякомъ треугольникѣ ABC, у котораго перпендикуляръ CD падаетъ внѣ треугольника, будетъ прямоугольникъ изъ суммы и разности боковъ AC и BC равенъ прямоугольнику изъ цѣлаго основанiя AB и дважды взятаго разстоянiя ED между перпендикуляромъ CD и срединою E основанiя AB. (фигура 8).

До-

Доказательство. На продолженной AB сдѣлай AF=BD и положи AC=a, BC=b, AD=d, BD=c. И такъ для прямоугольныхъ треугольниковъ ACD и BCD будетъ $a^2-d^2=\overline{DC}^2$, и $b^2-c^2=\overline{CD}^2$, по сему $a^2-d^2=b^2-c^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $a^2-b^2=d^2-c^2$ или $(a+b).(a-b)$ $=(d+c).(d-c)=(AD+BD)\times(AD-BD)=FD\times AB$ $=2ED\times AB$; по сей причинѣ $(a+b).(a-b)$ $=(AC+BC)\times(AC-BC)=2ED\times AB$.

Теорема. IV. Удвоенной квадратъ изъ линѣи CE, проведенной изъ верьха угла ACB на средину основанія AB, съ удвоеннымъ квадратомъ изъ половины основанія AE или BE равенъ суммѣ квадратовъ изъ двухъ боковъ AC и BC (*фигура* 9 я).

Доказательство. Положимъ AC=a, BC=b, AE=BE=c, EC=d, ED=x. По свойству треугольниковъ AEC и BCE, будетъ $a^2-(c^2+d^2)$ $=2cx$ (*Часть* II. § 151); также $d^2+c^2-b^2$, $=2cx$(*Часть* II § 153), по сему $a^2-c^2-d^2=d^2+c^2$ $-b^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $a^2+b^2=2d^2$ $+2c^2$, то есть $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{EC}^2+2\overline{AE}^2$ или $2\overline{BE}^2$.

Задача I. Въ треугольникѣ ABC основаніе AC и высота BD извѣстны, найти бокъ вписаннаго въ немъ квадрата (*фигура* 10 я).

Рѣшеніе Алгебраическое. Положимъ AC=a, BD=b, бокъ квадрата EF=HD=x, BH будетъ $=b-x$. Для подобныхъ треугольниковъ ABC и BEF будетъ $a:x=b:b-x$ (*Часть* II. § 104); при чемъ $ab-ax=bx$ (§ 146), или $(b+a)x$ $=ab$, откуда найдется $x=\frac{ab}{a+b}$=EF=EG.

Рѣшеніе Геометрическое. На продолженномъ основаніи AC положи CO = BD; потомъ на линѣяхъ AO и AC начерти прямоугольники AN и AM, изъ коихъ бы высота перваго равна была боку GE вписаннаго квадрата, а послѣдняго равна высотѣ BD треугольника ABC, тогда будетъ прямоугольникъ AM = AN; ибо для подобныхъ треугольниковъ ABC и EBF будетъ AC : (EF)EG = BD : BH, при чемъ AC × BH = BD × EG = CO × ON, а придавъ къ каждому изъ сихъ прямоугольникъ PC, будетъ AN = AM = AC × BD = GE × (AC + BD). И такъ раздѣля площадь прямоугольника AN на AO, частное будетъ требуемый бокъ GF вписаннаго квадрата GEFI.

Прибавлен. Для начертанія въ данномъ треугольникѣ ABC квадрата GEFI проведи BK параллельно AC и равну BD; точки A и K соедини прямою линѣею AK; изъ точки F проведи FE параллельно AC; а наконецъ изъ точекъ E и F, опустивъ перпендикуляры EG и FI, будешь имѣть требуемой квадратъ: ибо для подобныхъ треугольниковъ ABK, AEF и ADB, AGF будетъ AE : AB = GE : BD = EF : BK; но BD = BK по положенію, по сему и GE = EF.

Слѣдств. Такимъ же образомъ въ данномъ треугольникѣ ABC впишется прямоугольникъ, у котораго бы бока были въ данномъ содержаніи, естьли только вмѣсто BK = BD положится такъ, чтобы BD къ BK была въ данномъ содержаніи.

Задача. II. Въ треугольникѣ ABC основаніе AB и высота DC извѣстны, также площадь вписаннаго прямоугольника MK содержится къ площади треугольника ABC, какъ $m : n$, найти высоту DN и основаніе LM прямоугольника MK (*фигура* 11).

Рѣшен. Алгебраич. Пусть будетъ высота CD$=a$, основаніе AB$=b$, высота DN прямоугольника $=x$. Для подобныхъ треугольниковъ ABC и CKI будетъ (CD)a : (AB)b=(CN)$a-x$: KI$=\frac{ab-bx}{a}$; по сей причинѣ KI×DN$=(\frac{ab-bx}{a}).x$ $=\frac{abx-bx^2}{a}$=DN×ML; но $n:m=\frac{ab}{2}:\frac{abx-bx^2}{a}$, при чемъ $\frac{nabx-nbx^2}{a}=\frac{mab}{2}$; умножь каждую часть чрезъ 2 и на a, будетъ $2nabx-2nbx^2=ma^2b$ или $2nbx^2-2nabx=-ma^2b$; раздѣли на $2nb$, выйдетъ $x^2-ax=-\frac{ma^2}{2n}$, откуда найдется $x=\frac{a}{2}$ $\pm\sqrt{(\frac{a^2}{4}-\frac{ma^2}{2n})}$.

Рѣшен. Геометрич. Составя слѣдующую пропорцію : $n:m=\triangle$ABC : LKIM, найдется площадь прямоугольника LKIM; потомъ раздѣля высоту CD въ точкѣ H пополамъ, опиши на линѣи DH полкруга, въ коемъ проведя хорду FH равну HN, изъ точки F опусти на CD перпендикуляръ FGP такъ, чтобы GP была равна $\frac{1}{2}$AB; опусти перпендикуляръ PE, будетъ прямоугольникъ KIML= прямоугольнику DGPE, котораго площадь раздѣля на основаніе DE или $\frac{1}{2}$AB, частное будетъ =DG; потомъ по извѣстной DH и HG найдется HF = HN (*Часть* II. § 174), и DH+HN=DN, почему сыщется и основаніе LM.

Доказат. Поелику DH : (HF)HN=NH : HG (*Часть* II. § 172), при чемъ $\overline{HN}^2$=DH × HG,

и $\overline{DH}^2 - (\overline{FH})^2 \overline{HN}^2 = (DH + HN) \times (DH - HN) = \overline{FD}^2$; но $DH + HN = DN$, и DH или $CH - HN = CN$, по сему $\overline{FD}^2 = DN \times CN = DH \times DG$ (*Часть* II. § 172); откуда произойдетъ слѣдующая пропорція: $DN : GD = DH : CN = \frac{1}{2}CD : CN$; но $\frac{1}{2}CD : CN = (\frac{1}{2}AB) DE : (KI) LM$, и для равенства содержаній будетъ $DN : DG = DE : LM$, при чемъ $DN \times LM = DG \times DE$, то есть прямоугольникъ $LKIM = DGPE$.

Прибавлен. I. Изъ сего явствуетъ, что по правиламъ Геометрическаго рѣшенія предложенной задачи можно будетъ въ данномъ треугольникѣ вписать прямоугольникъ, котораго бы площадь была въ данномъ содержаніи къ треугольнику или равна данному, *на примѣръ* Q; ибо начертя на половинѣ основанія DE, какъ выше показано, прямоугольникъ DP равенъ данному Q (*Часть* II. § 293), послѣднее совершить уже не трудно; однакожъ сіе начертаніе тогда только учинить можно, когда данной прямоугольникъ Q, будетъ не больше половины площади треугольника ABC или когда высота DG прямоугольника DGPE будетъ не больше DH или $\frac{1}{2}DC$; ибо въ противномъ случаѣ задача будетъ не возможна.

Прибавлен II. Въ данномъ треугольникѣ ABC (*Чертежъ* II. *фиг.* 12.) можно помянутой прямоугольникъ вписать равенъ данному Q и другимъ образомъ. Сперва начерти на основаніи AB прямоугольникъ ABPL равенъ данному Q; потомъ на линѣяхъ CK и DC опиши два полукружія KMC и DNC; изъ точки M, гдѣ первое полукружіе пересѣкаетъ основаніе AB, проведи MN параллельно къ CD, пока пересѣчется окружность послѣдняго въ N; изъ точки N проведи NEF параллельно къ AB, будетъ MN высота требуемаго прямоугольника: ибо $\triangle ABC : ABPL = \frac{1}{2}CD : DK$ (*Часть* II § 139); также и прямоугольникъ $DI \times EF : DI \times IC = EF : IC = AB : CD$; но $AB : CD = DK \times AB : DK \times CD$; и такъ для равенства содержаній будетъ $DI \times EF : DI \times IC = DK \times AB : DK \times CD$; но какъ $DI \times IC = \overline{IN}^2 = \overline{DM}^2 = DK \times CD$, по сей причинѣ изъ предъидущей пропорціи видно, что $DI \times EF$

=

$= DK \times AB = Q$. Изъ сего начертанія такимъ же порядкомъ и обратно не трудно будетъ найти высоту и основаніе вписаннаго прямоугольника GFEH, естьли только площадь онаго будетъ извѣстна.

Задача III. Найти двѣ линѣи, изъ коихъ бы сдѣланной прямоугольникъ равенъ былъ данному ABEF, и сумма ихъ квадратовъ равна данному квадрату ABCD (*фигура* 13).

Рѣшен. Алгебраич. Положивъ $AB = a$, $BE = b$, искомыя линѣи x и y, будетъ $ABEF = ab$, $\overline{AB}^2 = a^2$, посредствомъ чего найдется x и y, какъ въ XIII задачѣ смѣшаннаго квадратнаго уравненія показано.

Рѣшен. Геометрич. На линѣи AB описавъ полкруга AGB проведи BG и AG, которыя будутъ требуемыя линѣи: ибо $2(AG \times BG) = AB \times BE$ (*Часть* II § 133); но дабы оныя линѣи найти числами, то опусти перпендикуляръ GH, которой будетъ равенъ BE, по извѣстному поперешнику AB и перпендикуляру HG, найдутся AG и GB, какъ второй части въ § 175 показано.

Задача IV. Двѣ хорды AB и CD, перпендикулярно пересѣкающіяся въ точкѣ E, и линѣя OE изъ центра O въ точку сѣченія E проведенная, извѣстны, найти въ кругѣ полупоперешникъ OD (*фигура* 14).

Рѣшен. Алгебраич. Изъ центра O круга на данныя хорды AB и CD опусти перпендикуляры OF и OG и проведи полупоперешники OA и OD. Теперь положимъ $AF = \frac{1}{2}AB = a$, $DG = \frac{1}{2}CD = b$, $OE = c$, и $OD = AO = x$. Для прямоуголь-

угольныхъ треугольниковъ AOF и DOG будетъ $\overline{OF}^2 = x^2 - a^2$, и $\overline{OG}^2 = x^2 - b^2$; но $\overline{OF}^2$ или $\overline{GE}^2 + \overline{OG}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{EF}^2 = OE$, то есть $2x^2 - (a^2 + b^2) = c^2$, откуда найдется $x = \sqrt{(\frac{c^2 + a^2 + b^2}{2})} = OD = AO$.

Рѣшен. Геометрич. На линѣи EO описавъ полкруга, проведи чрезъ точку F сѣченія линѣю IFH перпендикулярно къ EO; изъ точки O величиною линѣю DG пересѣки линѣю IH въ точкѣ H, и проведи HE, которая равна будетъ AF; ибо $\overline{AO}^2$ или $\overline{OD}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{OF}^2 = (\overline{DG}^2)\overline{HO}^2 + (\overline{OG}^2)\overline{EF}^2$; но поелику $\overline{HE}^2 - \overline{EI}^2 = \overline{HO}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{HI}^2$, также $\overline{EF}^2 - \overline{EI}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{IF}^2$; вычти послѣднія величины, изъ первыхъ останется $\overline{HE}^2 - \overline{EF}^2 = \overline{HO}^2 - \overline{OF}^2$; потомъ придай къ обѣимъ изъ сихъ величинъ $\overline{EF}^2$ и $\overline{OF}^2$, выйдетъ $\overline{HE}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{HO}^2 + \overline{EF}^2$. Изъ сего видно, что $\overline{AF}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{OF}^2$; но $\overline{OF}^2 = \overline{OF}^2$, по сему $\overline{AF}^2 = \overline{HE}^2$; и AF = HE. Теперь по извѣстнымъ бокамъ треугольника OHE сыщется отрѣзокъ EI (*Часть* II. § 154); потомъ по извѣстному отрѣзку OI и поперешнику OE найдется хорда OF, которая, будучи перпендикулярна къ AB, раздѣляетъ оную на двѣ равныя части; наконецъ въ прямоугольномъ треугольникѣ AOF по извѣ-

вѣстнымъ бокамъ OF и AF найдется требуемой полупоперешникъ $AO = OD$.

Задача V. Полупоперешники OA и OC одноцентрныхъ круговъ и содержаніе хорды CD къ AB извѣстны, найти хорду CD и AB (*фиг.* 15).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ полупоперешникъ $AO = a$, $CO = b$, перпендикуляръ $OE = x$ и $CD : AB = n : m$. будетъ $\overline{AO}^2 - \overline{OE}^2 = \overline{AE}^2$, и $\overline{CO}^2 - \overline{OE}^2 = \overline{CE}^2$, то есть $a^2 - x^2 = \overline{AE}^2$, и $b^2 - x^2 = \overline{CE}^2$; но поелику $n : m = CD : AB = CE : AE$, то будетъ $\overline{CE}^2 : \overline{AE}^2 = n^2 : m^2 = b^2 - x^2 : a^2 - x^2$, при чемъ $n^2a^2 - n^2x^2 = m^2b^2 - m^2x^2$, а по переставкѣ членовъ выйдетъ $m^2x^2 - n^2x^2 = m^2b^2 - n^2a^2$; откуда найдется $x = \sqrt{\left(\frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^2 - n^2}\right)} = OE$; наконецъ по извѣстной EO и полупоперешникамъ AO и CO найдется AE и CE (теорема I.) и $2AE = AB$, также $2CE = CD$.

Рѣшен. Геометрич. Пусть $CD : AB$ или $\frac{1}{2}CD : \frac{1}{2}AB = 5 : 9$, то есть $EC : AE = 5 : 9$, по сему будетъ $EC : AC = 5 : 4$. Изъ точки A хорды AB поставь перпендикуляръ AF, пока пересѣчется съ продолженнымъ полупоперешникомъ OC въ точкѣ F: то въ разсужденіи прямыхъ угловъ OEC и CAF треугольники COE и CAF будутъ подобны, и для того $EC : AC = OC : CF = 5 : 4$; и такъ сдѣлавъ пропорцію $5 : 4 = OC : CF$ оттуда найдется CF; потомъ на линѣи FC опиши полкруга CAF, проведи полупоперешникъ AG, которой будетъ равенъ $\frac{1}{2}FC = CG$,

и CG+OC=OG; въ треугольникѣ AOG сыщи высоту AN(*Часть* II § 152), при чемъ и CN будетъ извѣстна, и чрезъ то найдется AC (*Часть* II § 146). Для подобныхъ треугольниковъ ACN и OCE сдѣлай слѣдующую пропорцiю AC:CO=CN:CE, и наконецъ будетъ CE+AC=AE, почему найдется и требуемая величина хордъ CD и AB.

Задача VI. По извѣстному полупоперешнику OD большаго круга найти полупоперешникъ BD одного изъ равныхъ круговъ, вписанныхъ въ большомъ кругу, касающихся между собою и окружности большаго круга (*фигура* 16 я).

Рѣшен. Алгебраич. Центры вписанныхъ круговъ соедини прямыми линѣями AB, AF и BF, продолжи AO до E и DO до C, отъ чего произойдутъ треугольники BCF и BOE подобны: ибо уголъ BCF=BEO прямые, и уголъ FBC общiй, того для будетъ BF:BO=CF:EO; но $CF=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}AF$, по сему $EO=\frac{1}{2}OB$. И такъ положимъ полупоперешникъ OD большаго круга $=a$, $BD=EB=x$, будетъ $BO=a-x$, $EO=\frac{a-x}{2}$. И такъ для прямоугольнаго треугольника BEO, будетъ $\overline{BE}^2+\overline{EO}^2=\overline{BO}^2$, то есть $(a-x)^2=x^2+(\frac{a-x}{2})^2$, или $a^2-2ax+x^2=\frac{5x^2-2ax+a^2}{4}$, а по умноженiи чрезъ 4 и по сокращенiи членовъ выйдетъ $x^2+6ax=3a^2$, откуда найдется $x=-3a\pm\sqrt{12a^2}=$ требуемому полупоперешнику EB=DB.

Рѣ-

Рѣшен. Геометрич. Чрезъ концы D, M и N проведи перпендикулярно линѣи GH, HK и GK, кои взаимно пересѣкшись, изобразятъ равносторонной треугольникъ GHK; потомъ изъ точки H проведи въ центръ B вписаннаго круга линѣю HB, отъ чего произойдетъ △DBH=△BLH; ибо DB=BL, HB общая, и уголъ BDH=BLH прямые, по сему и уголъ DHB=BHL; потомъ по извѣстному полупоперешнику OD большаго круга сыщи половину бока GH=HD (*Частъ* II § 206); также въ прямоугольномъ треугольникѣ ODH по извѣстнымъ OD и DH найдется HO (теорема 1); наконецъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: OH+HD : HD=OD : DB (*Частъ* II § 120).

Слѣдств. Изъ сего удобно видѣть можно, что для начертанія трехъ равныхъ круговъ въ данномъ кругѣ, коихъ бы окружности касались между собою и окружности большаго круга, надлежитъ сперва около даннаго круга описать равносторонной треугольникъ (GHK *Частъ* II § 208); потомъ проведя изъ центра O полупоперешники OG, OH и OK, продолжи оные до M, N и D; раздѣли уголъ DHO на двѣ равныя части линѣею HB, которая пересѣкшись съ OD въ точкѣ B, опредѣлитъ центръ вписываемаго круга, коего полупоперешникъ DB будетъ равенъ BL = LA и проч.

Прибавлен. Посредствомъ сего правила въ данномъ кругѣ легко вписать можно, сколько потребно будетъ равныхъ круговъ, коихъ бы окружности касались меду собою и окружности даннаго круга; ибо надлежитъ только сперва около даннаго круга описать правильной многоугольникъ, имѣющій столько боковъ, сколько тѣхъ круговъ вписать потребно будетъ, какъ здѣсь описанъ квадратъ CEGF (*фиг.* 17); а потомъ проведя изъ центра A косые и прямые полупоперешники AC, AE, AB, AN и проч. раздѣли половину угла многоугольника ACB на двѣ равныя части линѣею CD, отъ пресѣченія которой съ линѣею AB точка D будетъ центръ, а DB полупоперешникъ требуемыхъ круговъ; потомъ опустя изъ точки D на AC перпендикуляръ DLI, будетъ DB =DL=IL=NI и прочая.

За-

Задача VII. Въ квадратѣ ABCD части DE и GB, боковъ CD и AB и линѣя GE, соединяющая точки E и G, извѣстна, найти бокъ квадрата AD (*Фигура* 18).

Рѣшен. Алгебраич. Проведи DF параллельно GE и продолжи AB до F, будетъ DE=FG. Теперь положимъ DE=FG=a, GB=b, EG=DF=c AG=x, будетъ BG+AG=AB=AD=$b+x$, FG−AG=AF=$a-x$. И такъ для прямоугольнаго треугольника ADF будетъ $\overline{AD}^2+\overline{AF}^2=\overline{FD}^2$, то есть $(b+x)^2+(a-x)^2=c^2$, или $2x^2+(2b-2a)x+b^2+a^2=c^2$ а по переставкѣ величинъ и по раздѣленiи на 2 выйдетъ $x^2+(b-a)x=\frac{c^2-b^2-a^2}{2}$, откуда найдется $x=\frac{a-b\pm\sqrt{(2c^2-b^2-a^2-2ab)}}{2}$=AG, и напослѣдокъ будетъ BG+AG =AB=AD. Такимъ же образомъ найдется бокъ квадрата, ежели меньшiя части EC и AG будутъ извѣстны.

Рѣшен. Геометрич. Поелику DE=FG, то будетъ GB+FG=FB=FA+AB=FA+AD; по сему въ прямоугольномъ треугольникѣ FAD дiогоналъ FD и сумма двухъ боковъ FA+AD будучи извѣстны, найдутся порознь AD и AF (*Частъ* II. § 177). Естьлижъ даны будутъ малыя части EC и AG, то опустивъ перпендикуляръ EH, изъ центра H полупоперешникомъ HG опиши дугу GI, и для того будетъ EC=HB, и HB+GH+AG=AB=EH, но HG=HI, по сему HI+HB+AG=HE, слѣдовательно

вательно HE—HI=HB+AG=AG+EC=EI. Изъ сего видно. что въ прямоугольномъ треугольникѣ HEG діогональ GE и разность боковъ EH—GH=H—HI=EI, будучи извѣстны, найдется бокъ HE и GH (*Часть* II. § 150).

Задача VIII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC проведенныя отъ концовъ B и C діогонали BC въ средину другихъ боковъ линѣи BD и CE извѣстны, найти каждой бокъ треугольника ABC (*фигура* 19).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ AE=EB=x, AD=DC=y, DB=a, CE=b. Для прямоугольныхъ треугольниковъ AEC и ABD, будетъ $x^2+4y^2=b^2$ и $y^2+4x^2=a^2$, вычти первое уравненіе изъ послѣдняго, четырежды взятаго, остатокъ будетъ $15x^2=4a^2-b^2$, а по раздѣленіи на 15 выйдетъ $x^2=\frac{4a^2-b^2}{15}$, откуда найдется $x=\sqrt{(\frac{4a^2-b^2}{15})}$=AE, потомъ по извѣстнымъ линѣямъ AE и EC найдется AC и діогональ BC.

Рѣшен. Геометрич. Поелику $\overline{AC}^2+\overline{AE}^2=\overline{EC}^2$ $=4\overline{AD}^2+\overline{AE}^2$; также $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$, или $4\overline{AE}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$ по сему сумма квадратовъ $\overline{EC}^2+\overline{BD}^2=5\overline{AE}^2+5\overline{AD}^2$, а по раздѣленіи на 5 выйдетъ $\frac{1}{5}\overline{EC}^2+\frac{1}{5}\overline{BD}^2=\overline{AE}^2+\overline{AD}^2$, которое вычтя изъ $\overline{BD}^2=4\overline{AE}^2+\overline{AD}^2$, остатокъ будетъ $\overline{BD}^2$

$-\frac{1}{5}(\overline{CE}^2 + \overline{BD}^2) = 3\overline{AE}^2$, а по раздѣленiи на 3 частное будетъ $= \overline{AE}^2$; наконецъ изъ площади сего квадрата извлекши квадратной корень, получишь $AE = \frac{1}{2}AB$, посредствомъ чего найдутся и прочiя части треугольника.

Задача IX. Въ треугольникѣ ABC величина линѣй AE, BD и CF, проведенныхъ изъ угловъ A, B и C въ половину противуположенныхъ боковъ извѣстна, найти каждой бокъ треугольника ABC (*фигура* 20 я).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $CF = a$, $BD = b$, $AF = c$, $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$. По свойству предложеннаго треугольника ABC будетъ $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{CF}^2 + 2\overline{AF}^2$ (*Теорема* IV.), то есть $x^2 + z^2 = 2a^2 + \frac{y^2}{2}$, или $x^2 + z^2 - \frac{y^2}{2} = 2a^2$.

Такимъ же образомъ найдется - - $\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 2c^2 \\ y^2 + z^2 - \frac{x^2}{2} = 2b^2 \end{cases}$;

вычти первое уравненiе изъ удвоенной суммы двухъ послѣднихъ, останется $4y^2 + \frac{y^2}{2} = 2(2c^2 + 2b^2 - a^2)$ или $9y^2 = 4(2c^2 + 2b^2 - a^2)$, откуда найдется $3y = 2\sqrt{(2c^2 + 2b^2 - a^2)}$, а по раздѣленiи на 3 выйдетъ $y = \frac{2}{3}\sqrt{(2c^2 + 2b^2 - a^2)}$. Такимъ же образомъ найдется $x = \frac{2}{3}\sqrt{(2c^2 + 2a^2 - b^2)}$, и $z = {}_3\sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)}$.

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ AB въ обѣ стороны, проведи изъ точки C линѣи CH и CI параллельно AE и DB; но поелику CE = BE и CD

и CD=AD, то будетъ AH=AB=BI; по сему HC=2AE, CI=2BD и HI=3AB; и такъ два бока CH, CI и линѣя CF, раздѣляющая основанiе треугольника CHI пополамъ, будутъ извѣстны, въ которомъ $\overline{CH}^2+\overline{CI}^2=2\overline{CF}^2+2\overline{HF}^2$, или $\overline{CH}^2+\overline{CI}^2-2\overline{CF}^2=2\overline{HF}^2$, а по раздѣленiи на 2 выйдетъ $\frac{1}{2}(\overline{CH}^2+\overline{CI}^2-2\overline{CF}^2)=\overline{HF}^2$; по сему извлекши квадратной корень изъ $\overline{HF}^2$, получишь HF, и наконецъ будетъ $\frac{1}{3}HF=AH=AB$. Такимъ же образомъ найдутся и прочiе бока.

Или

Продолживъ CF сдѣлай FG=CF и проведя GH и GI, изобразится параллеллограмъ GHCI, въ которомъ бокъ GI=CH, HG=CI и дiогональ CG будучи извѣстны, найдется дiогональ HI (*Часть* II. § 168); а наконецъ $\frac{1}{3}HI=AB$. Такимъ же образомъ найдутся и бока AC и CB.

Задача X. Площадь квадрата BEDF, вписаннаго въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, равна площади треугольника ADC, и притомъ бока AB и BC извѣстны, найти бокъ квадрата BF (*фигура* 21 я).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ $AB=a$, $BC=b$, $BF=x$, будетъ $AF=a-x$, $CE=b-x$; но какъ $\Delta ABC=\overline{BF}^2+\Delta ADF+\Delta DEC+\Delta ADC$, то есть $x^2+(\frac{a-x}{2})x+(\frac{b-x}{2})x+x^2=\frac{ab}{2}$, а по сокращенiи членовъ выйдетъ $2x^2+(a+b)x=ab$, которое

 раз-

раздѣливъ на 2, будетъ $x^2+(\frac{a+b}{2})x=\frac{ab}{2}$, откуда найдется $x=\frac{\sqrt{(a^2+10ab+b^2)}-a-b}{4}=BF$.

Рѣшен. Геометрич. Сперва надлежитъ показать, какимъ образомъ такого свойства квадратъ въ данномъ треугольникѣ ABC вписать можно: для сего начерти въ треугольникѣ ABC квадратъ BHGI (*Задача* I.); потомъ продолживъ AB, сдѣлай BK равну полсуммѣ боковъ AB и BC; раздѣли BH на двѣ части такъ, чтобы одна часть BF была средняя пропорціональная между другою частію HF и линѣею BK (*Часть* II § 302), будетъ BF равна боку требумаго квадрата BEDF; ибо $\triangle ADC : ABC$ или $\frac{AB \times BC}{2} = GD : EG = HF : HB$; но $HB \times (AB+BC) = AB \times BC$ (*Задача* I), по сему $\triangle ADC : \frac{HB \times (AB+BC)}{2} = HF : HB = HF \times \frac{AB+BC}{2} : HB \times \frac{AB+BC}{2}$; и такъ для равенства содержаній будетъ $ADC : HB \times \frac{AB+BC}{2} = HF \times \frac{AB+BC}{2} : HB \times \frac{AB+BC}{2}$. Но когда послѣдующіе члены равны, то и предъидущіе равны, то есть $ADC = HF \times (\frac{AB+BC}{2}) = HF \times BK = \overline{BF}^2$ (*Часть* II. § 302). Теперь посредствомъ первой задачи сыщется бокъ BH вписаннаго квадрата BHGI; потомъ по извѣстной BF и $BM=\frac{1}{2}BK$ найдется $MN=MF$, и $MF-BM=BF=$ требуемому боку квадрата.

Задача XI. Извѣстна діогональ AC прямоугольнаго треугольника ABC, и разность AE линѣй

линѣй AD и DC, отъ концовъ діогонали въ центръ вписаннаго круга проведенныхъ, найти прочіе бока треугольника (*фигура 22 я*).

Рѣшен. Алгебраич. На продолженную CD опусти перпендикуляръ AH. Положимъ $AC=a$, $AD=x$, $CD=y$, данная разность $x-y=b$ или $x-b=y$. Изъ сего видно, что уголъ ADH $=DAC+ACD=\frac{1}{2}ACB+\frac{1}{2}BAC=$ половинѣ прямаго угла = углу HAD, по сему $DH=AH$; но поелику $\overline{AD}^2=\overline{DH}^2+\overline{AH}^2=2\overline{DH}^2$, то по раздѣленіи на 2 выйдетъ $\overline{DH}^2=\frac{1}{2}\overline{AD}^2$, и $DH=\sqrt{\frac{\overline{AD}^2}{2}}$ $=\sqrt{\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}=AH$; но для тупоугольнаго треугольника CAD будетъ $\overline{CD}^2+\overline{AD}^2+2HD\times CD$ $=\overline{AC}^2$, то есть $y^2+x^2+\frac{2yx}{\sqrt{2}}=a^2$; поставь въ семъ уравненіи $x-b$ вмѣсто y, и c вмѣсто $\sqrt{2}$, то уравненіе изобразится такимъ образомъ: $x^2-2bx+b^2+x^2+\frac{2x^2-2bx}{c}=a^2$, а по умноженіи чрезъ c и по сокращеніи членовъ выйдетъ $2cx^2$ $+2x^2-2bcx-2bx=ca^2-cb^2$, или $(2c+2)x^2-$ $(2c+2)bx=ca^2-cb^2$; раздѣли на $2c+2$, частное будетъ $x^2-bx=\frac{ca^2-cb^2}{2c+2}$, откуда найдется $x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{ca^2-cb^2}{2c+2}+\frac{b^2}{4})}=AD$, почему и прочее найти уже не трудно, какъ изъ слѣдующаго Геометрическаго рѣшенія видно.

Рѣшен. Геометрич. Поелику извѣстно, что уголъ $ADH=45°=DCE+DEC$, и $CD=DE$, по

по сему уголъ DEC=DCE=$\frac{1}{2}$ADH=22$\frac{1}{2}$ град. : и такъ продолживъ CE, опусти на оную перпендикуляръ AI; сдѣлай IK=AI и проведи EK, будетъ уголъ DEC=AEI=KEI, по сему уголъ AEK=45 град. Изъ сего удобно видѣть можно, что AE есть полупоперешникъ такого круга, въ которомъ AK будетъ бокъ восьмиугольника, коего величина посредствомъ § 251 Второй Части сыскана быть можетъ; потомъ раздѣля AK на двѣ равныя части, получишь AI; по извѣстной AE и AI найдется EI; также въ прямоугольномъ треугольникѣ ACI сыщется CI, и CI—EI=CE. Теперь изъ центра D вписаннаго круга опусти на CE и AC перпендикуляры DG и DF, будетъ EG=$\frac{1}{2}$EC; потомъ для подобныхъ треугольниковъ AEI, EDG сдѣлай слѣдующую пропорцію: EI : EG=AE : DE; наконецъ въ треугольникѣ ADC найдется перпендикуляръ DF и отрѣзки AF и CF (*Частъ* II. § 154); будетъ CF=CL, AF=AM касательныя, и DF=DL=DM, полупоперешники вписаннаго круга, посему CF+DF=BC, и AF+DF=AB.

Задача XII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, сумма боковъ AB+BC составляющихъ прямой уголъ ABC, и перпендикуляръ BD извѣстны, найти каждой бокъ треугольника порознь (*Чертежъ* III. *фигура* 23).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ AB+BC=a, BD=b, AB=x, BC=y, AC=z, будетъ $a=x+y$. И такъ $(AB+BC)^2=x^2+y^2+2xy=a^2$ (A); но для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$, то есть $x^2+y^2=z^2$, также

также $xy = bz$ (потому что половина каждаго изъ сихъ произведеній означаетъ одну и туже площадь треугольника ABC). Теперь поставя сіи послѣднія величины въ уравненіи A вмѣсто равныхъ количествъ, выйдетъ $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2bz = a^2$, откуда найдется $z = -b \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}$; а наконецъ и прочіе бока AB и BC треугольника ABC сысканы быть могутъ.

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ CB сдѣлай BF = AB, начерти на CF квадратъ CFGH; потомъ на діогонали AC изобрази прямоугольникъ AQ, котораго бы бокъ AP былъ равенъ 2BD + AC; изъ точки P полупоперешникомъ PQ опиши дугу QM, будетъ PQ = AC и MA = 2BD. Изъ сего начертанія видно, что IKHR $= \overline{BC}^2$, BFLI $= \overline{AB}^2$, и прямоугольникъ CI = IG = AB × BC = BD × AC, по сему $\overline{CF}^2 =$ IKHR + BFLI + CI + IG $= \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \times BC = \overline{AC}^2 + 2BD \times AC = (MA + MP) \times AC = AP \times AC =$ извѣстной площади квадрата CFGH; и такъ площадь прямоугольника AQ и разность боковъ AP − PQ = AM = 2BD извѣстны, слѣдовательно найдется PQ = AC (*Часть* II § 179); наконецъ по извѣстной AC, BD и суммѣ боковъ AB + BC сыщется каждой бокъ порознь (*Часть* II § 177).

Задача XIII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC высота BE и разость DC боковъ AB и BC, составляющихъ прямой уголъ, извѣстны, найти AC, AB и BC (*фиг.* 24 *я*).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ BE$=a$, разность CD$=$BC$-$AB$=b$, AB$=$BD$=x$, AC$=y$, будетъ BC $= x + b$. Для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, то есть $2x^2+2bx+b^2=y^2$; но поелику BC$\times$AB$=$AC $\times$BE, то есть $(x+b)x=ay$, по сему $2x^2+2bx =2ay$; и такъ поставя въ предъидущемъ уравненiи $2ay$ вмѣсто $2x^2+2bx$, будетъ $2ay+b^2=y^2$ или $y^2-2ay=b^2$, откуда найдется $y = a \pm \sqrt{(b^2+a^2)}$; потомъ по извѣстной AC, DC и BE, уже не трудно будетъ найти AB и CB.

Рѣшен. Геометрич. На боку BC начерти квадратъ BCGF, въ которомъ проведя дiогональ CF, изъ точки D протяни черту DLK параллельно BF, и чрезъ точку L линѣю XS параллельно BC, также на боку AC изобрази квадратъ ACQO; сдѣлай CM$=$2BE; проведи MP параллельно OQ; сдѣлай QR$=$CM, будетъ OR$=$OP. И такъ въ разсужденiи прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$; но поелику $\overline{AB}^2 = \overline{SG}^2$; то будетъ прямоугольникъ BK$+$KI$+$DS$=$AM $+$MO; но какъ (BD$+$DC)$\times$(AB)BD$=$BE$\times$AC $=$BD$\times$BF$=$LK$\times$LI, по сему BK$+$KI$=$(2BE) CM$\times$AC, слѣдовательно BK$+$KI$+ \overline{CD}^2 =$ AM $+$MO; но BK$+$KI$=$AM, по сей причинѣ $\overline{CD}^2$ $=$площади прямоугольника PMQO, въ которомъ разность QR боковъ OQ и OP $=$ 2BE извѣстна, найдется онаго бокъ MP$=$AC (*Часть* II § 179); а наконецъ по извѣстному основанiю AC и разности

ности DC боковъ AB и BC сыщется каждой бокъ AB и BC.

Задача XIV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстны разности DC и AE между діогональю AC и боками AB и BC, найти каждой бокъ треугольника ABC (*фигура* 25).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ AE$=a$, DC $=b$, и разность ED$=x$, то будетъ AD$=$AB $=a+x$, CE$=$BC$=b+x$, и для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$, то есть $(a+x)^2+(b+x)^2=(a+b+x)^2$, или $2x^2+2ax+2bx+a^2+b^2=x^2+2ax+2bx+2ab+a^2+b^2$, а по сокращеніи членовъ и по раздѣленіи на 2 выйдетъ $x^2=2ab$, откуда найдется $x=\sqrt{2ab}$.

Рѣшен. Геометрич. На діогонали AC начерти квадратъ ACQN; проведи діогональ NC, а изъ точекъ D и E проведи линѣи DP и EO параллельно AN, и чрезъ точки G и K линѣи FH и MI параллельно AC. Изъ сего начертанія видно, что $\overline{BC}^2=\overline{CE}^2=$ ECMK $=$ ECMLGR $+$(RGLK)$\overline{ED}^2$; также $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2=$FGPN $=$ FRKLPN$+$(RGLK)$\overline{ED}^2$; по сему $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$ $=$ ECMLGR$+$FRKLPN$+2\overline{ED}^2$; но $\overline{AC}^2=$ECMLGR $+$FRKLPN $+$ (RGLK) $\overline{ED}^2+$ AR$+$LQ, по сему $\overline{AC}^2=$ ECMLGR $+$ FRKLPN $+$ $2\overline{ED}^2$ $=$ ECMLGR $+$FRKLPN $+$ $\overline{ED}^2$ $+$ AR $+$ LQ, а по отнятіи ра-

равныхъ количествъ останется $\overline{ED}^2 = AR + LQ$ $= 2AR$; но поелику въ прямоугольникѣ AR бокъ $ER = DG = DC$ и AE извѣстны, почему и площадь онаго будетъ извѣстна, и такъ умноживъ площадь сего прямоугольника чрезъ 2, получишь площадь квадрата RGLK $= \overline{ED}^2$, котораго квадратной корень $= ED$, а наконецъ $AE + ED$ $= AB$, и $DC + ED = BC$.

Задача XV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ $AB + BC + AC$ и площадь онаго извѣстны, найти каждой бокъ порознь (*фиг.* 26).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ площадь треугольника $ABC = d^2$, бокъ $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$, и сумма боковъ $x + y + z = b$, откуда найдется $x + y = b - z$ (A). Для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, то есть $x^2 + y^2 = z^2$, и $xy = 2d^2$, придай удвоенное послѣднее уравненiе къ первому, будетъ $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 4d^2$, а по извлеченiи квадратнаго корня выйдетъ $x + y = \sqrt{(z^2 + 4d^2)} = b - z$; возвысь части сего уравненiя во вторую степень, выйдетъ $z^2 + 4d^2 = b^2 - 2bz + z^2$ или $2bz$ $= b^2 - 4d^2$, а по раздѣленiи на $2b$ найдется $z = \frac{b^2 - 4d^2}{2b}$, посредствомъ чего найдутся и и прочiе бока треугольника ABC.

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ дiогональ AC въ обѣ стороны, сдѣлай $CE = BC$, и $AD = AB$; начерти на линѣи DE квадратъ DQTE, въ которомъ проведя дiогональ EQ, протяни къ DQ параллельныя линѣи AR и CS, а чрезъ точки

I и N линѣи KG и MP параллельно къ DE, при чемъ произойдетъ $QMNR = \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, NHIO $= \overline{AC}^2$, $CIKE = \overline{BC}^2$ и GDAH = удвоенной площади треугольника ABC; но какъ $DE = AB + AC + BC$, то раздѣля извѣстную площадь квадрата DETQ на двѣ равныя части, будешь имѣть площадь треугольника EDQ, изъ которой вычтя удвоенную площадь треугольника ABC = GDAH, останется площадь многоугольника QGHAEQ; но поелику прямоугольникъ HC = прямоугольнику OK, и сумма треугольниковъ $ICE + QMN = \Delta NOI$ (потому что сумма квадратовъ $ICEK + QMNR = NHIO$), по сему площадь прямоугольника MGKP = QGHAEQ будучи извѣстна, и основаніе онаго $MP = DE = AB + AC + BC$ также извѣстно, найдется высота $HN = HI = AC$, и наконецъ по извѣстной площади треугольника ABC, діогонали AC и суммѣ боковъ $AB + BC$ сыщется BF, AB и BC (*Часть* II § 138 и 175).

Задача. XVI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC положеніе и величина прямой линѣи ED параллельной къ AB дана, также и части CD и BD извѣстны, найти на линѣи ED точку G, чрезъ которую бы изъ верьха C угла ACB проведенною линѣею CF отрѣзанная часть GE равна была GF (*фиг.* 27).

Рѣшен. Алгебраич. Опустивъ на AB перпендикуляръ GH положимъ $CD = b$, $ED = a$, $DB = GH = c$, $FG = EG = x$, будетъ $GD = a - x$. Для подобныхъ треугольниковъ CGD и FGH будетъ $b : c = a - x : FH$, откуда найдется

FH

$FH = \frac{(a-x)c}{b}$. Въ разсужденiиже прямоугольнаго треугольника FGH будетъ $\overline{FG}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{HF}^2$ то есть $x^2 = c^2 + \frac{c^2(a-x)^2}{b^2}$, изъ чего выйдетъ $x^2 + (\frac{2ac^2}{b^2-c^2})x = \frac{(b^2+a^2)c^2}{b^2-c^2}$, откуда найдется $x = \frac{bc\sqrt{(b^2+a^2-c^2)}-ac^2}{b^2-c^2}$.

Рѣшен. Геометрич. Положи EI=DB; изъ точки I, взятой за центръ, разстоянiемъ CD пересѣки EC въ точкѣ K, и проведи IK; потомъ изъ точки C проведи прямую линѣю CGF параллельно KI, то будетъ EG=FG; ибо для подобныхъ треугольниковъ CGD и CFB, CG:GF =CD:(DB)EI; а для подобныхъ треугольниковъ FIK и GCE будетъ (IK)CD:EI=GC:GF, по сему CG:GF=CG:GE; но CG=CG, слѣдовательно GF=GE.

Задача. XVII. Площадь треугольника ABC, основанiе AB, и сумма боковъ AC+BC извѣстны, найти бокъ AC и BC. (*Фигура* 28).

Рѣшенiе Алгебраич. Въ данномъ треугольникѣ ABC начерти сперва кругъ FDE; потомъ на продолженной CA сдѣлай AH=BF, будетъ HC=½(AB+AC+BC), и HD=AB.(*Часть* II § 155 *Слѣд.* 1), по сему HC-(HD)AB=CD. Теперь положимъ площадь треугольника ABC =a, основанiе AB=HD=b. HC=c, HC-(HD)AB =DC=d, AD=x, будетъ HD-AD=AH= $b-x$. По свойству треугольника ABC будетъ $\sqrt{(b-x)xdc} = a$ (*Часть* II § 156); умножъ каждую часть сего уравненiя квадратно, выйдетъ

детъ $bdcx-dcx^2=a^2$ или $dcx^2-bdcx=-a^2$, а по раздѣленіи на dc выйдетъ $x^2-bx=-\frac{a^2}{dc}$, откуда найдется $x=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{dc})}=AD$; по сему $AD+DC=d+\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{dc})}=AC$.

Рѣшеніе Геометрическое смотри во Второй Части § 194.

Задача. XVIII. На данной по положенію линѣи DE найти точку C, изъ которой бы разность проведенныхъ линѣй AC и BC къ даннымъ точкамъ A и B равна была данной линѣи PQ (*Чертежъ* IV *фигура.* 29.)

Рѣшеніе. Раздѣли линѣю AB на двѣ равныя части въ точкѣ F; потомъ сыскавъ третью пропорціональную линѣю къ 2AB и къ данной PQ, положи оную отъ F до G; сдѣлай GI=PQ; изъ точекъ I и G проведи линѣи GH и IK перпендикулярно къ AB, и соединивъ точки A и H прямою линѣею AH, изъ точки K величиною линѣи AB пересѣки продолженную HA въ точкѣ L, проведи LK, и AC параллельно LK, которая данную линѣю DE пресѣчетъ въ требуемой точкѣ C.

Доказател. Проведя CM перпендикулярно къ AB, будетъ LK параллельна AC, также KI, CM и HG параллельны между собою; по сей причинѣ будетъ KL или AB : AC=KH : CH=(GI)PQ : MG (*Частъ* II § 104 *Слѣдст.* III), и для равенства сихъ содержаніи будетъ AB : AC=PQ : MG, при чемъ AB×MG=PQ×AC; также 2AB : PQ=PQ : FG по рѣшенію, откуда найдется

дется $AB \times FG = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2$; по сему сумма помянутыхъ произведенiй будетъ $AB \times MG + AB \times FG = PQ \times AC + \frac{1}{2}\overline{PQ}^2$. Изъ сего видно, что $AB \times MG + AB \times FG = AB \times (MG + FG) MF$, слѣдственно $AB \times MF = AC \times PQ + \frac{1}{2}\overline{PQ}^2$, а по умноженiи чрезъ 2 выйдетъ $2AB \times MF = 2AC \times PQ + \overline{PQ}^2$; но $2AB \times FM = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$ (*Теорема* II *слѣдс.*), по сему $2AC \times PQ + \overline{PQ}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$ а придавъ къ обѣимъ частямъ $\overline{AC}^2$, будетъ $\overline{AC}^2 + 2AC \times PQ + \overline{PQ}^2 = \overline{BC}^2$ или $(AC + PQ)^2 = \overline{BC}^2$; слѣдовательно $AC + PQ = BC$, и наконецъ $BC - AC = PQ$.

Задача. XIX. На окружности даннаго круга CED найти точку E, въ которую ежели отъ концовъ A и B данной линѣи AB проведутся линѣи AE и BE, то бы линѣя CD, соединяющая точки сѣченiя C и D, была параллельна данной по положенiю линѣи AB (*фигур.* 30.)

Рѣшенiе. Изъ средины данной линѣи AB поставь перпендикуляръ FG, на которомъ по предъидущей задачѣ сыщи точку I, такъ чтобы разность линѣй AI и HI, проведенныхъ изъ центра H и отъ конца A линѣи AB, равна была полупоперешнику HP даннаго круга; потомъ продолживъ линѣю IH до пресѣченiя съ окружностiю даннаго круга въ точкѣ E, проведи изъ сей точки линѣи AE и BE; наконецъ соедини точки C и D прямою линѣею CD, то оная будетъ параллельна данной AB.

Дока-

Доказател. Для равныхъ треугольниковъ AIF и FBI будетъ BI=AI, также AI=EI; ибо AI – HI=HP=HE по рѣшенію, а придавъ къ обѣимъ частямъ HI, будетъ AI=HI+HE =EI=BI, по сему изъ точки I, взятой за центръ, полупоперешникомъ EI описанной кругъ ABE касается даннаго круга въ точкѣ E (*Часть* II. § 89). Теперь изъ центровъ I и H опусти на проведенныя хорды AE и EB перпендикуляры IN и IO, HL и HM, то отъ сего произойдутъ треугольники EHL и EIN, также EHM и EIO подобны между собою, и для того будетъ EH : EI=EL : EN=EM : EO или 2EL : 2EN=2EM : 2EO, то есть EC : AE=ED EB; по сей причинѣ и въ разсужденіи общаго угла AEB треугольники ECD и AEB будутъ подобны (*Часть* II. § 105), и уголъ ECD=EAB, слѣдовательно линѣя CD параллельна AB (*Часть* II. § 49 *слѣд.* I).

Увѣдомленіе. Благосклонный читатель! дабы не увеличить число моихъ листовъ, и не лишить васъ того удовольствія, которое вы при разрѣшеніи предлагаемыхъ задачь собою пріобрѣсть можете, то я описавъ нѣкоторыя предварительныя отношенія, служащія къ опровѣрженію неправильно задаваемыхъ вопросовъ, сообщаю вамъ для собственнаго вашего изслѣдованія требуемаго нѣсколько такихъ предложеній, коихъ рѣшенія мнѣ извѣстны.

Примѣчанія.

I. Ежели дано будетъ по извѣстнымъ бокамъ AB и AD найти площадь параллелограма ABCD (*фиг.* 31), въ которомъ ни положенїе линѣй AB и AD подъ числомъ градусовъ, ни дїогональ AC не извѣстны; то сей вопросъ

просъ будетъ не возможной: ибо описавъ изъ точекъ A и B полупоперешниками AD и BC дуги GH и EF, и проведя въ произвольныя точки G и H линѣи AH и AG, протяни изъ точекъ G и H параллельно основанїю линѣи HF и GE, и соедини точки E и F съ точкою B прямыми линѣями, то отъ сего не перемѣняя данной величины боковъ параллелограма ABCD произойдетъ безконечное множество неравныхъ между собою параллелограмовъ AHFB и AGEB, такъ что самой большой изъ нихъ будетъ тотъ, у котораго бокъ AG есть перпендикуляръ; слѣдовательно сей вопросъ не можетъ быть принятъ къ разрѣшенїю.

II. Равнымъ образомъ не можно будетъ рѣшить и слѣдующаго вопроса: ежели дана будетъ только величина однихъ боковъ AB, BD, DC и AC четвеpосторонника ABCD (*фиг.* 32), не упоминая о прочихъ частяхъ онаго; ибо описавъ изъ точки A полупоперешникомъ AC дугу EF, проведи въ произвольныя точки E и F линѣи AE и AF; потомъ изъ точекъ E и F разтворенїемъ линѣи CD опиши дуги, а изъ точки B полупоперешникомъ BD дугу GH, пересѣкающую первыя въ точкахъ H и G; потомъ проведи FH и EG, также BH и BG, то отъ сего произойдетъ безконечное число различной величины четвероугольниковъ, имѣющихъ бока равные даннымъ; изъ чего видно, что искомая величина плоскости есть безконечно перемѣняющаяся, и потому задача не возможна.

III Безразсудно бы было требовать, дабы по извѣстной плоскости и суммѣ боковъ треугольника ABC (*фиг.* 33) найти каждой бокъ порознь; ибо въ семъ случаѣ можно представить безконечное множество другихъ треугольниковъ, изъ коихъ каждой бокъ при всякой перемѣнѣ будетъ имѣть различную и непостоянную величину, такъ что сумма ихъ всегда будетъ равна суммѣ боковъ △ ABC. Для изъясненїя сего опустивъ перпендикуляръ CG, сдѣлай произвольную высоту GD; потомъ сыскавъ къ высотѣ GD къ CG и къ основанїю AB четвертую пропорцїональную AF, проведи DE параллельно AB, между коими, при меньшой высотѣ GD, можно будетъ провести двѣ линѣи AE и EF, коихъ бы сумма была равна AC+BC+BF; также при большой высотѣ можно провести двѣ линѣи AE и EF, коихъ бы сумма была равна AC+BC+BF, и такъ поступая далѣе, произойти можетъ безконечное число треугольниковъ, имѣющихъ непостоянную величину своихъ боковъ, коихъ общая сумма AF+AE+EF всегда будетъ равна AB+BC+AC, и плоскость каждаго будетъ равна плоско-

сти

сти даннаго треугольника ABC; ибо $GD : CG = AB : AF$, гдѣ $GD \times AF = CG \times AB$, по сему и $\frac{1}{2}(GD \times AF) = \frac{1}{2}(CG \times AB)$, то есть $\triangle ADF = \triangle ABC$; слѣдовательно сей вопросъ не подверженъ рѣшенію, а потому и невозможной.

И такъ при всякой предлагаемой какой бы то ни было Геометрической задачѣ надлежитъ приступающему къ рѣшенію оной прежде разсмотрѣть связь извѣстныхъ частей данной фигуры; разсуждая притомъ, не подвержены ль неизвѣстныя или искомыя части какой либо перемѣнѣ, и естьли найдется, что можно будетъ оную изобразить съ различною перемѣною требуемыхъ только величинъ въ другомъ видѣ, то такой вопросъ будетъ непостоянной, и слѣдовательно не возможной. Симъ-то самимъ способомъ познаются возможныя и невозможныя Геометрическія задачи.

О задачахъ, требующихъ рѣшенія.

I. Извѣстны бока AB и BC прямоугольника ABCD, найти бокъ BE вписаннаго ромба BEDF *фиг.* 34.

II. Въ треугольникѣ ABC извѣстна высота BD, основаніе AC и произведеніе двухъ боковъ AB и BC, найти оные *фиг.* 35.

III. Въ прямоугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ ABC разность CD діогонали AC и бока AB извѣстна, найти прочее *фиг.* 36.

IV. Сумма боковъ AB+BC+AC прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника ABC извѣстна, найти каждой бокъ порознь *фиг.* 37.

V. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC діогональ AC и полупоперешникъ EF вписаннаго круга извѣстны, найти бокъ AB и BC *фиг.* 38.

VI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, основаніе AB, и другой бокъ BC съ разностію CD, то есть BC+DC извѣстны, найти діогональ AC *фиг* 39.

VII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ AB+BC и разность перпендикуляровъ AB—AC=DB извѣстны, найти прочее *фиг.* 40.

VIII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC разность BD основанія AB и высоты AC и разность BE діогонали BC и бока AC извѣстны, найти прочее *фиг* 41.

IX. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ AB+BC+AC и разность BD двухъ боковъ, составляющихъ прямой уголъ, извѣстны, найти каждой бокъ порознь *фиг.* 40.

X. Въ прямоугольникѣ ABCD вписать другой EFGH, которой бы равенъ былъ половинѣ, третьей, четвертой части или $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ и проч. даннаго, такъ чтобы бока онаго были въ равномъ разстояніи отъ боковъ даннаго; а потомъ по извѣстнымъ бокамъ AB и CB найти разстояніе DI *фиг.* 42.

XI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC перпендикуляръ BD, опущенной на діогональ AC, извѣстенъ, и притомъ отрѣзокъ DC= боку AB, найти каждой бокъ порознь (*Черт.* V. *фиг.* 43).

XII. Площадь правильнаго восьмиугольника A извѣстна, найти бокъ BC *фиг.* 44.

XIII. Въ треугольникѣ ABC проведены чрезъ произвольно взятую точку G изъ угловъ A, B и C линѣи AE, BF и CD, въ которомъ части боковъ AD, DB, AF и CE извѣстны, найти прочія неизвѣстныя части *фиг.* 45.

XIV. Въ треугольникѣ ABC основаніе AC, высота BE и разность DC боковъ AC и BC извѣстны, найти бокъ AB *фиг.* 46.

XV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC разность BD боковъ AB и AC, и сумма AB+BC діогонали съ бокомъ извѣстны, найти прочее *чертеж.* IV. *фиг.* 40.

XVI. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ AB + BC + AC и разность CD между діо-

діогональю AC и основаніемъ AB извѣстны, найти прочее *фиг.* 39.

XVII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстенъ перпендикуляръ BD, опущенной изъ прямаго угла B на діогональ AC, и содержаніе боковъ AB и BC дано, найти прочее *чертеж.* V. *фиг.* 47.

XVIII. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстна величина перпендикуляра BD и содержаніе діогонали AC къ боку AB, найти прочее *фиг.* 47.

XIX. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстна величина бока AB и содержаніе отрѣзковъ $AD:DC = n:m$, найти прочее *фиг.* 47.

XX. Въ полкругѣ AEFD извѣстна часть AB діаметра AD, найти бокъ BC вписаннаго квадрата BCFE *фиг.* 48.

XXI. Въ полукругѣ ACDB хорды AC, CD и DB порознь извѣстны, найти поперешникъ AB *фиг.* 49.

XXII. Извѣстна величина бока AB правильнаго пятнатцатиугольника, найти полупоперешникъ AC, и обратно по извѣстному полупоперешнику AC найти бокъ AB *фиг.* 50.

XXIII. Бока AB, BC CD и DA четверосторонника ABCD вписаннаго въ кругѣ, найти отрѣзки AE, BE, CE и DE діогоналей AC и BD *фиг.* 51.

XXIV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC извѣстна площадь онаго и разность DC діогонали AC и основанія AB, найти бока онаго *Чертеж.* IV. *Фиг.* 39.

XXV. Въ четвероугольникѣ ABCD извѣстны бока AB, BC, CD, AD, сумма діогоналей $AC+BD$ и линѣя EF, проведенная въ половины діогоналей, найти каждую діогональ AC и BD *фиг.* 52.

XXVI. Въ полукругѣ части AC, CB поперешника AB, хорда DE порознь, и сумма боковъ $CD+CE$ извѣстны, найти каждой бокъ CD и CE *фиг.* 53.

XXVII. Поперешникъ AB и наружныя части CD и CE боковъ AC и BC неравностороннаго треугольника ABC извѣстны, найти части AD и BE *фиг.* 54.

XXVIII. Величина полупоперешника AB, и синусъ прямой BC съ синусомъ обращеннымъ CD, то есть BC + CD извѣстны, найти каждой порознь *фиг.* 55.

XXIX. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, полупоперешникъ GH круга и бокъ ED вписаннаго квадрата извѣстны, найти каждой бокъ треугольника ABC порознь (*фиг.* 56). Рѣшенїе Тригонометрическое.

XXX. Въ остроугольномъ треугольникѣ ABC, части основанїя AD, EC и углы ABD и EBC извѣстны, найти прочїя части даннаго треугольника ABC фиг. 57.

КОНЕЦЪ ЧЕТВЕРТОЙ И ПОСЛѢДНЕЙ ЧАСТИ КУРСА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ.



Заключенïе.

Благосклонный читатель! хотя я предисловïемъ первой части и обѣщалъ сообщить почтенной Публикѣ пятую часть моего курса о свойствахъ кривыхъ линѣй и о искуствѣ метанïя бомбъ; но поелику слабые труды мои, яко частнаго Учителя, не взирая на приписуемыя имъ отъ нѣкоторымъ любителей наукъ похвалы (какъ-то изъ напечатаннаго въ моей Фортификацïи одобренïя видно), будучи весьма мало въ учрежденныя училища къ наставленïю юношества допускаемы, не возвратили мнѣ еще и того прïобрѣтеннаго ученïемъ моимъ стяжанïя, которое употреблено на тисненïе сочиненныхъ мною пяти книгъ: то безпредѣльное мое къ подобнымъ упражненïямъ для пользы общества стремленïе, вкупѣ съ надеждою, питавшею меня къ полученïю должнаго воздаянïя, изчезло; по сей-то причинѣ принужденнымъ я себя нашелъ слабые подвиги мои нынѣ оставить, дабы подкрѣпя удрученныя силы и удержавъ остатки слабаго знанïя моего залогомъ собственности, не возвращаться къ первымъ духа моего рвенïямъ, доколѣ смертность, облекающая оной, не разстроитъ свои органическïя движенïя.

Имена Особъ, благоволившихъ подписаться для полученія Алгебры.

число книгъ.

Его Высокопревосходительство Г. Генералъ Аншефъ и разныхъ Орденовъ Кавалеръ Петръ Богдановичъ Пассекъ - - 1.

Его Сіятельство Г. Генералъ Порутчикъ и разныхъ Орденовъ Кавалеръ Князь Сергій Өедоровичъ Голицынъ - - - 1.

Его Превосходительство Г. Инженеръ Генералъ Маіоръ Иванъ Андреевичъ Вельяшевъ-Волынцовъ 1.

Его Превосходительство Артиллеріи Г. Генералъ Маіоръ Иванъ Өедоровичъ Фонъ-Мертенсъ - 1.

Его Превосходительство Г. Генералъ Маіоръ и Кавалеръ Николай Даниловичъ Языковъ - 1.

Его Высокородіе Г. Брегадиръ и Кавалеръ Гаврила Михайловичъ Барковъ - - 1.

Его Высокородіе Г. Статской Совѣтникъ Александръ Андреевичъ Щербининъ - - 1.

Его Сіятельство Г. Камеръ-Юнкеръ Графъ Никита Петровичъ Панинъ - - 10.

Его Высокородіе Г. Камеръ-Юнкеръ и Кавалеръ Петръ Петровичъ Нарышкинъ - 5.

Его Сіятельство Г. Полковникъ Графъ Иванъ Ивановичъ Гендриковъ - - 2.

Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Яковъ Федоровичъ Апрѣлевъ - - - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Михайла Васильвичъ Аргамаковъ - - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Алексѣй Федоровичъ Ладыженской - - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Полковникъ Александръ Павловичъ Галаховъ - - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Коллежской Совѣтникъ Петръ Никифоровичъ Чернышъ - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Подполковникъ Сергей Михайловичъ Каменской - - 1.

Его

Его Сіятельство Г. Подполковникъ Графъ Петръ Александровичъ Толстой - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Подполковникъ Иванъ Васильевичъ Бибиковъ - - 2.

Его Высокоблагородіе Артиллеріи Г. Маіоръ Михайла Аѳанасьевичъ Никифоровъ - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Надворный Совѣтникъ Василей Андреевичъ Дашковъ - 1.

Его Высокоблагородіе Гвардіи Г. Капитанъ Николай Петровичъ Макаровъ - 1.

Его Высокоблагородіе Артиллеріи Г. Капитанъ Иванъ Яковлевичъ Блудовъ - - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Преміеръ-Маіоръ Герасимъ Никитичъ Савинъ - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Коллежской Ассесоръ Матвей Васильевичъ Бибиковъ - 3.

Его Высокоблагородіе Г. Губернской Землемѣръ Иванъ Емельяновичъ Измайловъ - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Секундъ-Маіоръ Василей Ильичъ Мещериновъ - - 1.

Его Высокоблагородіе Г. Секундъ-Маіоръ Алексѣй Яковлевичъ Бологовской - - 1.

Его Благородіе конной Гвардіи Г. Подпоручикъ Павелъ Петровичъ Свиньинъ - 1.

Его Благородіе Артиллеріи Г. Поручикъ Николай Николаевичъ Дурасовъ - 1.

Его Благородіе Артиллеріи Г. Поручикъ Александръ Авксентьевичъ Дурновъ - 1.

Его Благородіе Гвардіи Подпоручикъ Матвей Федоровичъ Толстой - - 10.

Его Благородіе Г. Титулярной Совѣтникъ Алексѣй Лукичъ Лукинъ - - 1.

Его Свѣтлости Г. Генералъ-Фельдмаршала и многихъ Орденовъ Кавалера Князь Григорья Александровича Потемкина, Г. Флигель-Адъютантъ Николай Никитичъ Демидовъ - 1.

Его Благородіе Гвардіи Г. Прапорщикъ Сергей Васильевичъ Толстой - - 1.

Его Благородіе Артиллеріи Г. Подпоручикъ Алексѣй Ивановичь Фонъ-Мертенсъ - 1.
— Артиллеріи Г. Подпоручикъ Александръ Ивановичь Рукинъ - - 1.
— Артиллеріи Г. Подпоручикъ Федоръ Ивановичь Хомутовъ - - 1.
— Г. Землемѣръ Иванъ Аѳанасьевичь Гавреневъ 1.
— Г. Землемѣръ Николай Григорьевичь Ивановъ съ Фортификаціею - - 1.
— Г. Землемѣръ Петръ Моисеевичь Жулинъ съ Фортификаціею - - 1.
— Г. Землемѣръ Яковъ Аѳанасьевичь Папковъ 1.
— Г. Землемѣръ Сергей Петровичь Спасеновъ 1.
— Г. Землемѣръ Николай Михайловичь Вознесенской - - 1.
— Г. Поручикъ Николай Ивановичь Цемировъ 1.
— Артиллеріи Г. Штыкъ-Юнкеръ Иванъ Ивановичь Сергеевъ - - 1.
— Неизвѣстная Особа - - 1.
— Г. Сержантъ Никита Васильевичь Демидовъ 1.
— Г. Сержантъ Павелъ Николаевичь Скрипицынъ - - - 2.
— Г. Сержантъ Федоръ Александровичь Уваровъ 1.
Московскаго Императорскаго Университета Г. Студентъ Тимоѳей Ивановичь Перелоговъ - 9.
— Г. Студентъ Ефимъ Петровичь Зерновъ - 1.
— Г. Артиллеріи Каптенармусъ Федоръ Федоровичь Кузминъ - - 1.
— Г. Артиллеріи Каптенармусъ Иванъ Андреевичь Сухаревъ. - - 1.

фигу. 1.

фигу. 2.

фигу. 3.

фиг. 4.

фиг. 5.

фиг. 6.

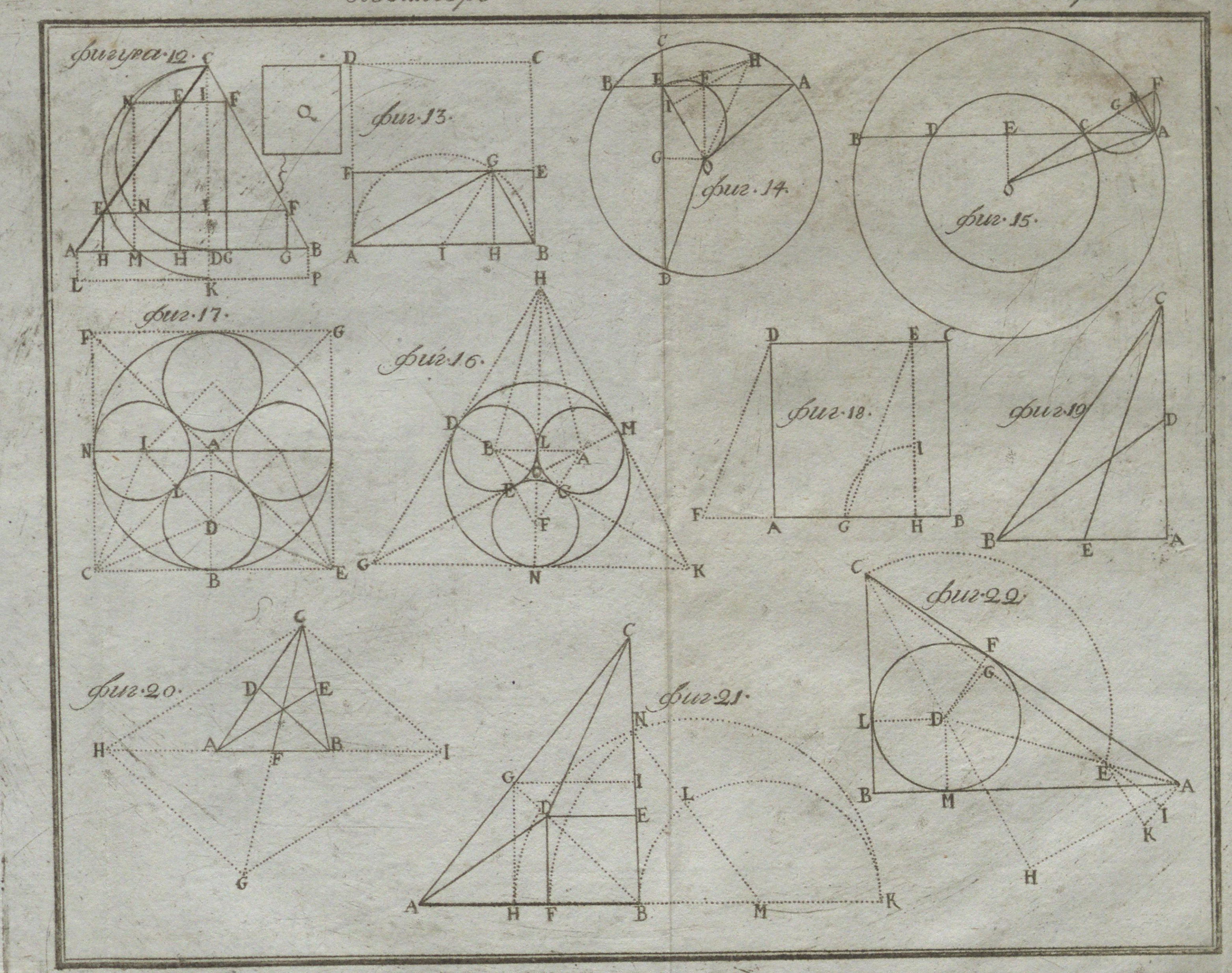
фиг. 7.

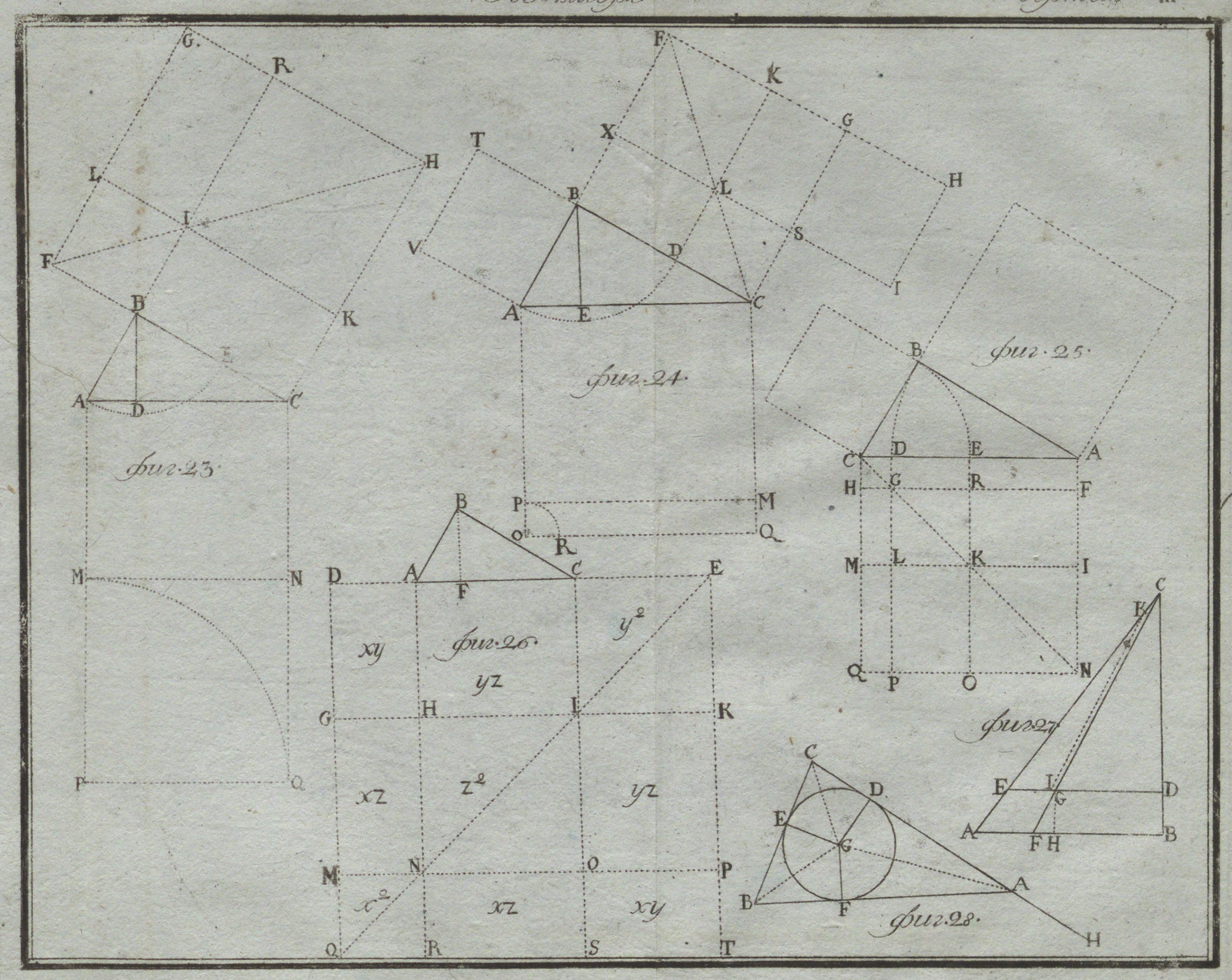
фиг. 8.

фиг. 9.

фиг. 10.

фиг. 11.


фигура 12
фиг. 13
фиг. 14
фиг. 15
фиг. 16
фиг. 17
фиг. 18
фиг. 19
фиг. 20
фиг. 21
фиг. 22


фиг. 23
фиг. 24
фиг. 25
фиг. 26
фиг. 27
фиг. 28
xy
yz
y²
xz
z²
yz
x²
xz
xy

фигура 29.

фиг. 30.

фиг. 31.

фиг. 32.

фиг. 33.

фиг. 34.

фиг. 35.

фиг. 36.

фиг. 37.

фиг. 38.

фиг. 39.

фиг. 40.

фиг. 41.

фиг. 42.

фигу. 43. фиг. 44. фиг. 45. фиг. 46.

фиг. 47. фиг. 48. фиг. 49.

фиг. 50. фиг. 51. фиг. 52. фиг. 53.

фиг. 55. фиг. 54. фиг. 56. фиг. 57.


Colour Chart #13
Inches
Centimetres
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
DANES PICTA .COM

